Eksamen høsten 2017 – Løsninger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Hjelpemidler: vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Oppgave 1

a $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 6x - 2$

b $g(x) = x^2 e^x$

$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = xe^x(x+2)$

c $h(x) = \ln(x^3 - 1)$

$$h'(x) = \frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

Oppgave 2

$$2\ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) = 2\ln b - \ln 1 + \ln b - \ln a - 2\ln b + \ln a - 2\ln b = -\ln b$$

Oppgave 3

a
$$\begin{aligned} \vec{a} - 2\vec{b} &= [3, 1] - 2 \cdot [4, 2] \\ &= [3, 1] - [8, 4] \\ &= [-5, -3] \end{aligned}$$

b
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= [3, 1] \cdot [4, 2] \\ &= 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

c Vi bruker at $\vec{b} \parallel \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = k \cdot \vec{c}$.

$[4, 2] = k \cdot [t+1, 3]$

$$4 = kt + k \quad \wedge \quad 2 = 3k$$

$$4 = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3} \qquad k = \frac{2}{3}$$

$$12 = 2t + 2$$

$$t = 5$$

d

$$
\begin{aligned}
|\vec{c}| &= |\vec{a}| \\
\sqrt{(t+1)^2+3^2} &= \sqrt{3^2+1^2} \\
\sqrt{t^2+2t+10} &= \sqrt{10} \\
t^2+2t+10 &= 10 \\
t^2+2t &= 0 \\
t(t+2) &= 0 \\
t = 0 \quad &\vee \quad t = -2
\end{aligned}
$$

Oppgave 4

a

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC \\
&= \frac{1}{2}\cdot x\cdot f(x) \\
&= \frac{x}{2}\cdot 2(x-3)^2 \\
&= x\cdot(x^2-6x+9) \\
&= x^3-6x^2+9x
\end{aligned}
$$

b

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= 0 \\
3x^2-12x+9 &= 0 \\
x^2-4x+3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$x = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{4\pm 2}{2}$$

$$x = 1 \quad \vee \quad x = 3$$

Det eneste kritiske punktet i definisjonsmengden er $x=1$.
Bruker likevel andrederiverttesten for å bekrefte at dette er et maksimalpunkt.

$$
\begin{aligned}
F''(x) &= 6x-12 \\
F''(1) &= -6
\end{aligned}
$$

Arealet av trekanten *ABC* er størst når $x=1$.

c $F(2) = 2^3-6\cdot 2^2+9\cdot 2 = 2$

Når $x=2$, er arealet lik 2.
Vi setter funksjonsuttrykket lik 2.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 2 \\
x^3-6x^2+9x &= 2 \\
x^3-6x^2+9x-2 &= 0
\end{aligned}
$$

Siden 2 er et nullpunkt for venstresiden, vet vi at divisjonen $\text{VS}:(x-2)$ går opp.

$$(x^3-6x^2+9x-2):(x-2)=x^2-4x+1$$
$$\underline{x^3-2x^2}$$
$$-4x^2+9x-2$$
$$\underline{-4x^2+8x}$$
$$x-2$$
$$\underline{x-2}$$
$$0$$

Så finner vi nullpunktene til kvotienten ved å bruke *abc*-formelen.

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

Men bare den ene av disse *x*-verdiene ligger i definisjonsmengden.

Arealet av trekanten *ABC* er også lik 2 for $x=2-\sqrt{3}$.

Oppgave 5

a Vi kan gjennomføre fire valg som hver har ti valgmuligheter på $10\cdot10\cdot10\cdot10=10\,000$ måter når rekkefølgen er bestemt. Det fins altså 10 000 ulike koder for denne typen nøkkelboks.

b Ettersom tallene ikke kan brukes flere ganger, og rekkefølgen ikke har noe å si, får vi $\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!\cdot6!}=\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\frac{7\cdot3\cdot10}{1}=210$ ulike koder for denne typen nøkkelboks.

c På rad 10 i Pascals talltrekant er det 11 tall, som kan skrives på formen $\binom{10}{k}$.

Det største av dem står i midten, og er $\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\cdot5!}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=\frac{7\cdot2\cdot9\cdot2}{1}=252$.

Koden må derfor bestå av fem tall, og da fins det 252 ulike koder.

Oppgave 6

a Vi setter $M=(x\,,\,y)$.

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$
$$[x-3\,,\,y+2]=\frac{1}{2}\cdot[-2\,,\,6]$$
$$x-3=-1\quad\wedge\quad y+2=3$$
$$x=2\quad\wedge\quad y=1$$

M har koordinatene (2 , 1).

b Vi ser at linja l går gjennom punktet (2 , 1) og har retningsvektor [3 , 1].

$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{r} = [-2\,,6] \cdot [3\,,1] = -6 + 6 = 0$

l står altså vinkelrett på AC og går gjennom midtpunktet på AC. Derfor er l midtnormalen.

c $x = 12$ gir $12 = 2 + 3t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{10}{3}$

$y = \frac{9}{2}$ gir $\frac{9}{2} = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{7}{2}$

Koordinatene i punktet $\left(12\,,\frac{9}{2}\right)$ kan ikke fås fra én og samme parameterverdi, og ligger derfor ikke på l.

d Midtpunktet på AB er $\left(\frac{3+9}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (6\,,1)$.

$\overrightarrow{AB} = [9-3\,,4-(-2)] = [6\,,6]$

Alle vektorer som står vinkelrett på $\overrightarrow{AB}$, kan brukes som retningsvektor for midtnormalen på AB. Vi velger [1 , –1] og får denne parameterframstillingen for midtnormalen på AB:

$$\begin{cases} x = 6 + s \\ y = 1 - s \end{cases}$$

Så finner vi skjæringspunktene mellom l og denne linja.

$$\begin{aligned} 2 + 3t &= 6 + s \\ 1 + t &= 1 - s \\ \hline 3 + 4t &= 7 \\ 4t &= 4 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$t = 1$ gir $x = 2 + 3 \cdot 1 = 5 \quad \wedge \quad y = 1 + 1 = 2$

Skjæringspunktet mellom l og midtnormalen på AB er (5 , 2).

Oppgave 7

a Her skal det stå $\Leftarrow$ i boksen.

Hvis x er lik 1, så er også x^2 lik 1.

Men selv om x^2 er lik 1, behøver ikke x være lik 1. x kan være lik –1.

b Her skal det stå $\Rightarrow$ i boksen.

Vi har at $(5x^2 - 1)' = 10x$.

Men det er uendelig mange funksjonsuttrykk som har $10x$ som sin deriverte, da den deriverte av konstantleddet uansett er lik null.

Oppgave 8

$f(x) = \mathrm{e}^{1-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\mathrm{e}^{1-x}$

Ettpunktsformelen gir likningen for tangenten gjennom punktet $\left(x_1\,,\ f(x_1)\right)$ på grafen til *f*.

$$y - f(x_1) = f'(x_1)\cdot(x - x_1)$$
$$y - \mathrm{e}^{1-x_1} = -\mathrm{e}^{1-x_1}\cdot(x - x_1)$$
$$y = -\mathrm{e}^{1-x_1}\cdot(x - x_1) + \mathrm{e}^{1-x_1}$$

Origo ligger på denne linja. Det gir

$$0 = -\mathrm{e}^{1-x_1}\cdot(0 - x_1) + \mathrm{e}^{1-x_1}$$
$$0 = x_1\mathrm{e}^{1-x_1} + \mathrm{e}^{1-x_1}$$
$$0 = \mathrm{e}^{1-x_1}(x_1 + 1)$$
$$x_1 = -1$$

Vi setter inn i likningen for tangenten og får

$$y = -\mathrm{e}^{1+1}\cdot(x+1) + \mathrm{e}^{1+1}$$
$$y = -\mathrm{e}^{2}x$$
$$y = \frac{1}{\mathrm{e}^2}x$$

DEL 2
Med hjelpemidler

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 1

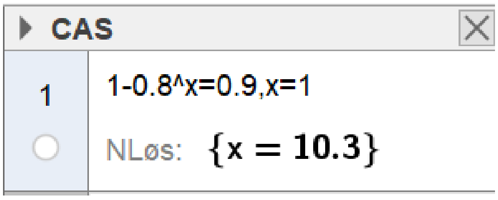
a For hver gang en ny sang skal spilles, er det et fire gunstige og 20 mulige utfall for hendelsen «Sangen er med artisten Kygo». Altså er $p = \dfrac{4}{20} = 0,2$.

b Vi bruker en bionomisk sannsynlighetsmodell med $n = 5$ og $p = 0,2$.

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048$$

Sannsynligheten er omtrent 20 % for at nøyaktig to av sangene er med Kygo.

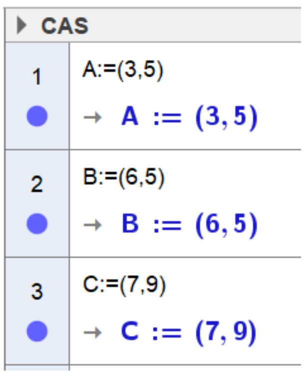
c Sannsynligheten for at han ikke skal høre en eneste sang med Kygo i løpet av x avspillinger er $0,8^x$. Sannsynligheten for at han skal få høre minst én sang med Kygo, er komplementærhendelsen, og har derfor sannsynligheten $1 - 0,8^x$.

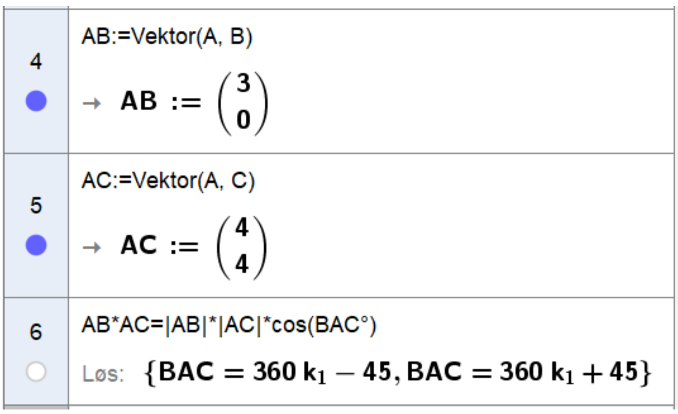


Han må høre på minst 11 avspillinger for at det skal være mer enn 90 % sannsynlig at han skal få høre minst én sang med Kygo.

Oppgave 2

a





Vi har i CAS funnet $\overrightarrow{AB} = [3\,,0]$, $\overrightarrow{AC} = [4\,,4]$ og $\angle BAC = 45°$.

b Vi definerer origo i CAS og bruker den gitte formelen til å bestemme posisjonsvektoren til tyngdepunktet.

7	O:=(0,0) → $O := (0, 0)$
8	OT:=1/3*(Vektor(O, A)+Vektor(O,B)+Vektor(O, C)) → $OT := \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$

Tyngdepunktet i trekanten ABC er $T = \left(\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right)$.

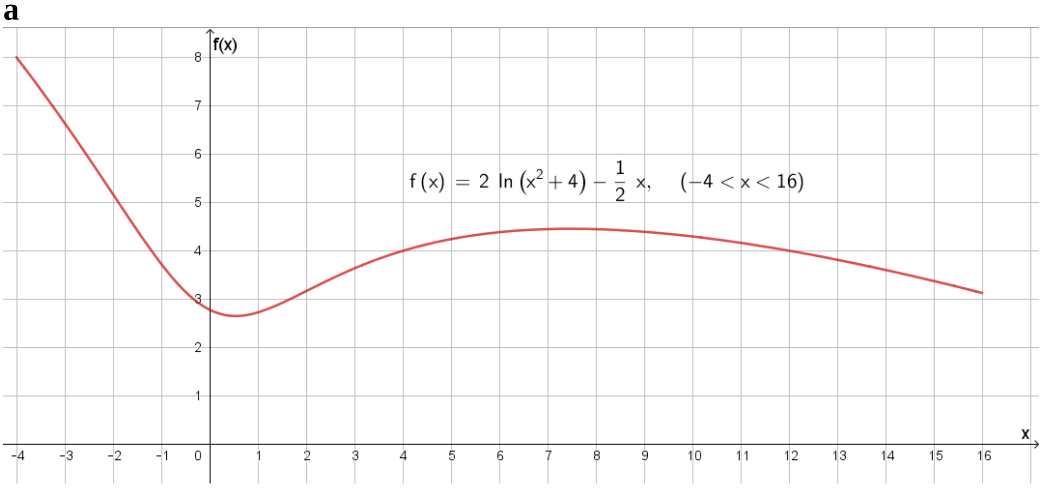
c Vi definerer aktuelle punkter i CAS og bruker den gitte formelen til å finne $F = (a, b)$.

▸ CAS	
1	D:=(2,3) → $D := (2, 3)$
2	E:=(-3,5) → $E := (-3, 5)$
3	F:=(a,b) → $F := (a, b)$
4	O:=(0,0) → $O := (0, 0)$
5	S:=(4,2) → $S := (4, 2)$
6	Vektor(O, S)=1/3*(Vektor(O,D)+Vektor(O,E)+Vektor(O,F)) Løs: $\{\{a = 13, b = -2\}\}$

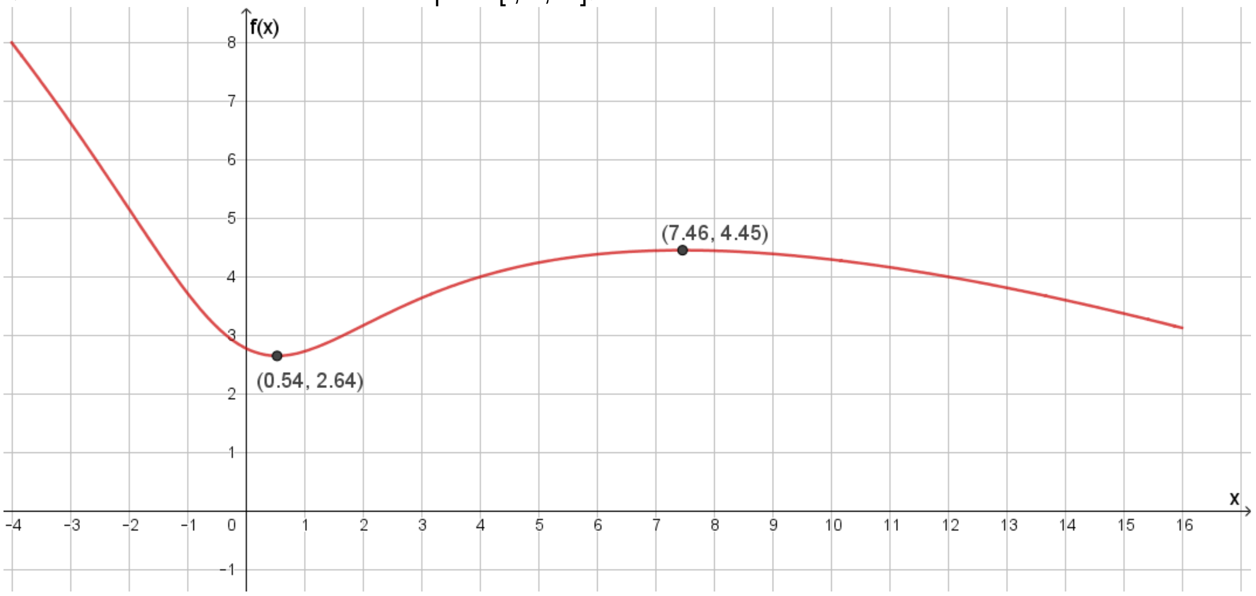
Koordinatene til hjørnet F er $(13, -2)$.

Oppgave 3

a

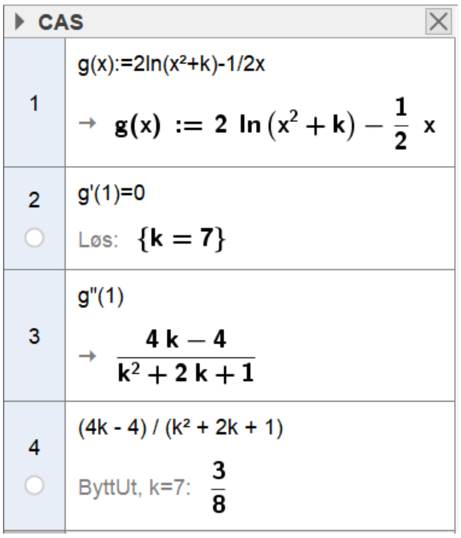


b Vi bruker kommandoen Ekstremalpunkt[f,-4,16].



Bunnpunktet på grafen til *f* er (0,54 , 2,64), og toppunktet på grafen til *f* er (7,46 , 4,45).

c



Definerer funksjonen *g*.

Bestemmer *k* slik at den deriverte er null for $x = 1$.

Andrederiverttesten.

Viser at $x = 1$ er et minimalpunkt.

$x = 1$ er et minimalpunkt når $k = 7$.

d

CAS		
1	g(x):=2ln(x²+k)-1/2x $\rightarrow\ g(x) := 2\ \ln\left(x^2+k\right) - \frac{1}{2}\ x$	Definerer funksjonen *g*.
2	g'(x)=0 Løs: $\left\{x = \sqrt{-k+16}+4, x = -\sqrt{-k+16}+4\right\}$	Finner ekstremalpunktene uttrykt ved *k*.
3	-k+16=0 Løs: $\{k = 16\}$	Finner *k*-verdien som gjør at radikanden er lik null.
4	-k+16>0 Løs: $\{k < 16\}$	Finner *k*-verdiene som gjør at radikanden er positiv.
5	-k+16<0 Løs: $\{k > 16\}$	Finner *k*-verdiene som gjør at radikanden er negativ.

Funksjonen g har ett ekstremalpunkt for $k = 16$.
Funksjonen g har to ekstremalpunkter for $0 < k < 16$.
Funksjonen g har ingen ekstremalpunkter for $k > 16$.

Oppgave 4

a

CAS		
1	OP:=Vektor(80+4t,16+3t) $\rightarrow\ OP := \begin{pmatrix} 80+4\ t \\ 16+3\ t \end{pmatrix}$	Definerer posisjonsvektoren
2	v:=Derivert(OP) $\rightarrow\ v := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$	Finner fartsvektoren.
3	|v| $\rightarrow\ 5$	Finner farten.

Skipet driver med fartsvektoren [4 , 3]. Farten er 5 nm/h, det vil si 5 knop.

b Om fire timer har *Euler* posisjonen (96 , 28).
Avstanden til origo er da 100 nautiske mil.
Redningsbåten må derfor holde farten 25 knop.

4	(80 + 4t, 16 + 3t) ByttUt, t=4: $(96, 28)$
5	|(96, 28)| $\rightarrow\ 100$
6	u:=100/4 $\rightarrow\ u := 25$

c

7	QP(t):=Vektor((-10,50),(80+4t,16+3t)) $\rightarrow \ \mathbf{QP(t) := \begin{pmatrix} 4\,t + 90 \\ 3\,t - 34 \end{pmatrix}}$	Definerer vektoren fra redningsbåten i *Q* til *Euler* i *P* som funksjon av tiden *t*.
8	35=|QP(t)|/t NLøs: $\{\mathbf{t = 3.001}\}$	Bruker at fart er strekning delt på tid til å bestemme hvor lang tid redningsbåten trenger for å nå fram til *Euler*.

Redningsbåten i *Q* kan være framme hos *Euler* om tre timer.