

Eksamen R1, V17

Del 1)

1a)

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 4$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 5 + 0 = 6x^2 - 5$$

1b)

$$g(x) = x^2 e^x$$

Bruker produktregelen:

$$u = x^2 \implies u' = 2x$$

$$v = e^x \implies v' = e^x$$

$$g'(x) = x^2 e^x + 2x e^x = x e^x (x + 2)$$

1c)

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 3} = (x^2 - 3)^{\frac{1}{2}}$$

Bruker kjerneregelen:

$$u = x^2 - 3 \implies u' = 2x$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} u' u^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot u^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{u^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$$

2a)

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

$$\text{FN} = (x - 3)(x + 3)$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} + \frac{1}{x + 3} + \frac{5}{x - 3} &= \frac{x^2 - 3}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{1(x - 3)}{(x - 3)(x + 3)} + \frac{5(x + 3)}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{x^2 - 3 + x - 3 + 5x + 15}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{x^2 + 6x + 9}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{(x + 3)^2}{(x - 3)(x + 3)} \\ &= \frac{x + 3}{x - 3} \end{aligned}$$

2b)

$$\begin{aligned} 2 \ln(a^{-3}b^2) - 3 \ln\left(\frac{b}{a^2}\right) &= 2(\ln a^{-3} + \ln b^2) - 3(\ln b - \ln a^2) \\ &= 2(-3 \ln a + 2 \ln b) - 3(\ln b - 2 \ln a) \\ &= -6 \ln a + 4 \ln b - 3 \ln b + 6 \ln a \\ &= \ln b \end{aligned}$$

3a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [2 - (-1), 1 - 6] = [3, -5] \\ \overrightarrow{AC} &= [4 - (-1), 4 - 6] = [5, -2] \end{aligned}$$

3b)

Lar D ha koordinatene $D(x, y)$.

$$\overrightarrow{CD} = [x - 4, y - 4]$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

$$[3, -5] + [x - 4, y - 4] = [0, 0]$$

$$[3 + x - 4, -5 + y - 4] = [0, 0]$$

$$[x - 1, y - 9] = [0, 0]$$

$$x - 1 = 0 \iff x = 1$$

$$y - 9 = 0 \iff y = 9$$

$$D(1, 9)$$

4a)

Vendepunkt hvis og bare hvis $P(1) = 0$ og $P''(1) = 0$, samtidig som $P'''(1) \neq 0$.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 6 = 1 - 6 - 2 + 6 = 0$$

$$P'(x) = 3 \cdot 2x^{3-1} - 2 \cdot 6x^{2-1} - 2 + 0 = 6x^2 - 12x - 2$$

$$P''(x) = 2 \cdot 6x^{2-1} - 12 - 0 = 12x - 12$$

$$P'''(x) = 12 - 0 = 12 \neq 0$$

$$P''(1) = 12 \cdot 1 - 12 = 12 - 12 = 0$$

Dermed er $(1, 0)$ et vendepunkt på P .

4b)

Siden $P(1) = 0$ er det kjekt å polynomdividere med $x - 1$:

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 - 6x^2 - 2x + 6) : (x - 1) = 2x^2 - 4x - 6 \\
 \underline{-2x^3 + 2x^2} \\
 -4x^2 - 2x \\
 \underline{4x^2 - 4x} \\
 -6x + 6 \\
 \underline{6x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

Bruker andregradsformelen, med $a = 2$, $b = -4$, $c = -6$:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4} = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 1 - 2 = -1$$

$$x_2 = 1 + 2 = 3$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 2(x - 3)(x + 1)$$

$$P(x) = 2(x - 3)(x - 1)(x + 1)$$

4c)

$$e^{nx} = (e^x)^n$$

$$2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 0 \iff 2(e^x)^3 - 6(e^x)^2 - 2e^x + 6 = 0$$

Setter $u = e^x$:

$$2u^3 - 6u^2 - 2u + 6 = 0$$

Vet fra før at løsningene er $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = 3$.

$$u_1 = 1 \iff e^{x_1} = 1 \iff x_1 = 0$$

$$u_2 = -1 \iff e^{x_2} = -1 \iff x_2 = \ln(-1)$$

Dette er ikke en gyldig løsning, da $\ln x$ kun er definert for $x > 0$.

$$u_3 = 3 \iff e^{x_3} = 3 \iff x_3 = \ln 3$$

To løsninger, $x = 0$ og $x = \ln 3$.

5a)

$$\overrightarrow{BC} = [3 - 6, 5 - 2] = [-3, 3]$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}[-3, 3] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = [6, 2] + \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[6 - \frac{3}{2}, 2 + \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right] \iff D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = [3 - 1, 5 - 0] = [2, 5]$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[2, 5] = \left[1, \frac{5}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = [1, 0] + \left[1, \frac{5}{2}\right] = \left[1 + 1, 0 + \frac{5}{2}\right] = \left[2, \frac{5}{2}\right] \iff E\left(2, \frac{5}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = [6 - 1, 2 - 0] = [5, 2]$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}[5, 2] = \left[\frac{5}{2}, 1\right]$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = [1, 0] + \left[\frac{5}{2}, 1\right] = \left[1 + \frac{5}{2}, 0 + 1\right] = \left[\frac{7}{2}, 1\right] \iff F\left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

5b)

Ser fra figuren at T ligger på linjestykket AD . Da er $\overrightarrow{AT} \parallel \overrightarrow{AD}$, og $\overrightarrow{AT} = s\overrightarrow{AD}$ følger direkte.

Tilsvarende er T på linjestykket BE , og det finnes en t slik at $\overrightarrow{BT} = t\overrightarrow{BE}$.

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BE}$$

5c)

$$\overrightarrow{BE} = \left[2 - 6, \frac{5}{2} - 2\right] = \left[-4, \frac{1}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{AD} = \left[\frac{9}{2} - 1, \frac{7}{2} - 0\right] = \left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AT}$$

$$s\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BE}$$

$$s\left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right] = [5, 2] + t\left[-4, \frac{1}{2}\right]$$

$$\left[\frac{7}{2}s, \frac{7}{2}s\right] = \left[5 - 4t, 2 + \frac{1}{2}t\right]$$

For at likheten skal gjelde må x -komponentene være like store, det samme for y -komponentene. Det gir følgende ligningssett:

$$\begin{aligned} \text{I : } \frac{7}{2}s &= 5 - 4t \\ \text{II : } \frac{7}{2}s &= 2 + \frac{1}{2}t \end{aligned}$$

Setter $\frac{7}{2}s = 5 - 4t$ fra ligning I inn i ligning II:

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}s &= 2 + \frac{1}{2}t \\ 5 - 4t &= 2 + \frac{1}{2}t \\ -4t - \frac{1}{2}t &= 2 - 5 \\ -\frac{9}{2}t &= -3 \\ t &= 3 \cdot \frac{2}{9} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Finner så s :

$$\begin{aligned} \frac{7}{2}s &= 2 + \frac{1}{2}t \\ s &= 2 \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}t \\ &= \frac{4}{7} + \frac{1}{7}t \\ &= \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{12}{21} + \frac{2}{21} \\ &= \frac{14}{21} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Deretter punktet T :

$$\vec{OT} = \vec{OA} + \vec{AT} = [1, 0] + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2}, 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{2} \right] = \left[\frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right]$$

$$\vec{OT} = \left[\frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right] \iff T \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

6a)

Innfører hendingsene G : en lyspære godkjennes, og D : en lyspære er defekt.

$$P(\overline{G}) = 0,080 \iff P(G) = 1 - 0,080 = 0,920$$

$$P(D | \overline{G}) = 0,920$$

$$P(D | G) = 0,020$$

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D | G) \cdot P(G) + P(D | \overline{G}) \cdot P(\overline{G}) \\ &= 0,020 \cdot 0,920 + 0,920 \cdot 0,080 \\ &= 0,920(0,020 + 0,080) \\ &= 0,920 \cdot 0,100 \\ &= 0,092 \\ &= 9,2\% \end{aligned}$$

6b)

$$P(\overline{G} | D) = \frac{P(\overline{G}) \cdot P(D | \overline{G})}{P(D)} = \frac{0,080 \cdot 0,920}{0,092} = 0,080 \cdot \frac{0,920}{0,092} = 0,080 \cdot 10 = 0,800$$

Sannsynligheten for at en defekt lyspære forkastes er 80,0%.

7a)

Ser fra figuren at $a = BF + FC$. Kvadratet $FSDC$ har sidelengde lik radien r , slik at $FC = r$. $a = BF + r$ følger direkte fra dette. Tilsvarende er $b = AD + DC = AD + r$, da DC er en side i kvadratet.

7b)

Trekantene AES og ASD har en felles side (AS), en annen side som er like lang ($ES = SD = r$), og når i tillegg $\angle ADS = \angle AES$ er de to trekantene kongruente, og $AD = AE$. På tilsvarende vis er $\triangle SEB \cong \triangle FSB$, og $BE = BF$.

$$\begin{aligned} a + b - c &= BF + r + AD + r - c \\ &= BE + AE + 2r - (BE + AE) \\ &= 2r \end{aligned}$$

7c)

Arealet til trekanten er grunnlinjen multiplisert med høyden. Kan her la a være grunnlinjen og b høyden:

$$T = \frac{1}{2}ab$$

Alternativt kan arealet skrives som summen av delarealene til trekantene ABS , BCS og ACS . Alle disse har høyden r .

$$T_{ABS} = \frac{1}{2}cr$$

$$T_{BCS} = \frac{1}{2}ar$$

$$T_{ACS} = \frac{1}{2}br$$

$$T = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

7d)

$$a + b - c = 2r \iff r = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

$$T = T$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}r(a + b + c)$$

$$ab = \frac{1}{2}(a + b - c)(a + b + c)$$

$$2ab = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc - ac - bc - c^2$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab - c^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Del 2)

1a)

Hypergeometrisk fordeling, hvor det trekkes totalt 5 av 52 kort, hvorav 3 av 4 mulige med valør 10 trekkes samt 2 av 48 med annen valør. Lar X være antall kort med valør 10.

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,00173$$

1b)

Det er 13 ulike valører i kortstokken, og det er 4 av hver valør. Det er da 13 ganger så stor sannsynlighet for å trekke 3 kort med samme valør som det er for å trekke 3 kort med valør 10. Lar antall kort med samme valør være Y .

$$P(Y = 3) = 13P(X = 3) = 13 \cdot 0,00173 = 0,0226$$

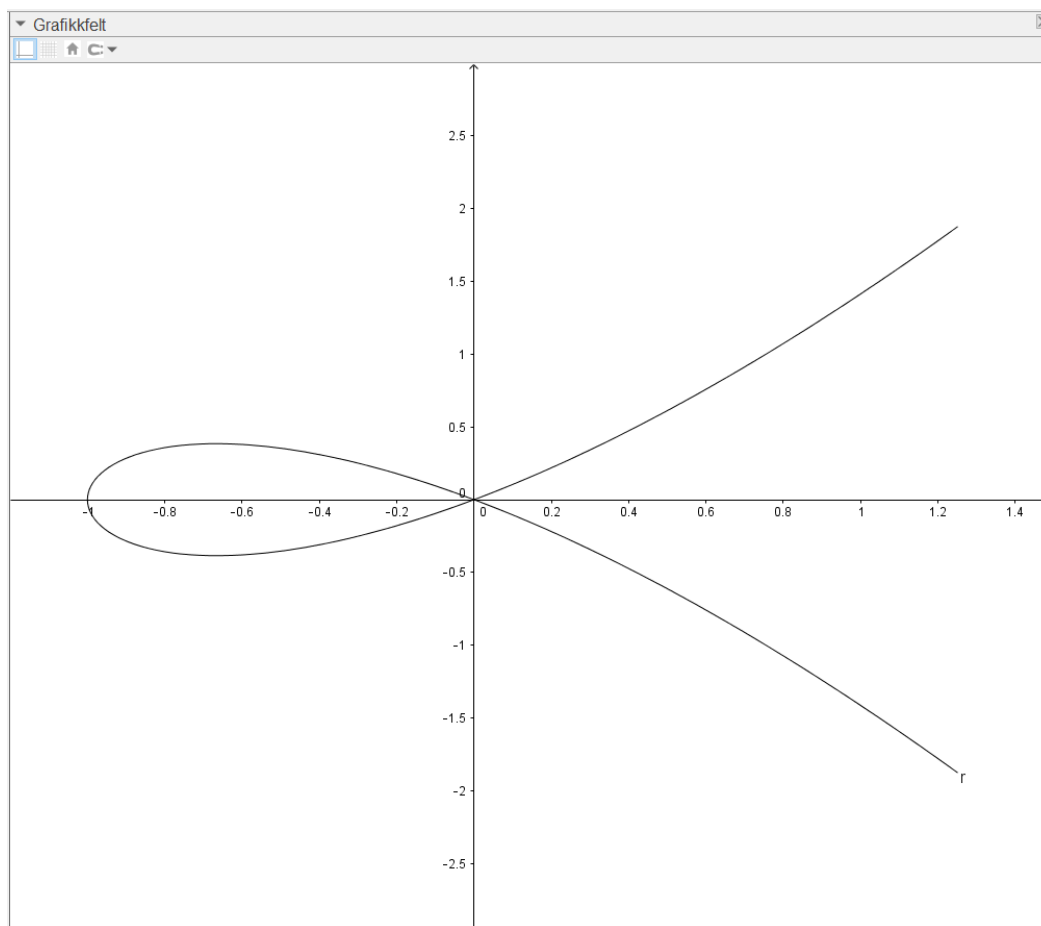
1c)

Det er 4 farger, hvorav 13 i hver farge. For å trekke 5 like må det trekkes 5 av 13 av hver farge, og 0 av de 39 som ikke har denne fargen. Siden det er 4 farger må denne sannsynligheten multipliseres med 4. Lar antall kort med samme farge være Z .

$$P(Z = 5) = 4 \cdot \frac{\binom{13}{5} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{5}} = 0,00198$$

2a)

Skriver kommandoen 'r:=Kurve[t^2 - 1, t^3 - t, t, -3/2, 3/2]' i inntastingsfeltet:



2b)

Deriverer r komponentvis for å finne $\vec{v}(t)$:

$$r_x = t^2 - 1$$

$$v_x = r'_x = 2t$$

$$r_y = t^3 - t$$

$$v_y = r'_y = 3t^2 - 1$$

$$\vec{v}(t) = [2t, 3t^2 - 1]$$

Deriverer $\vec{v}(t)$ komponentvis for å finne $\vec{a}(t)$:

$$a_x = v'_x = 2$$

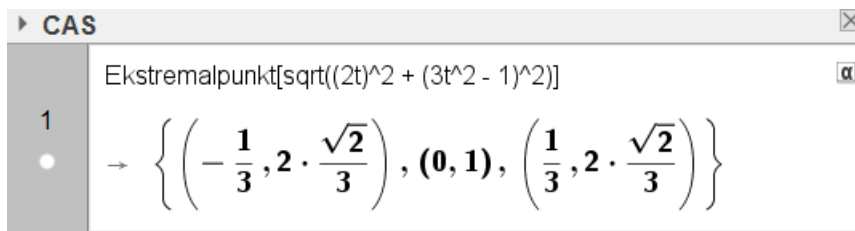
$$a_y = v'_y = 2 \cdot 3t - 0 = 6t$$

$$\vec{a}(t) = [2, 6t]$$

(Antar man kan bruke ParametriskDerivert-kommandoen i GeoGebra, men fungerer ikke her).

2c)

Vet at $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Bruker dette til å finne den minste banefarten:



De to løsningene som ikke er i midten har størst funksjonsverdi, og er dermed ikke minima for banefarten. Den minste banefarten er dermed 1, for $t = 0$

3a)

Bruker først Pythagoras på trekanten ABC :

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \iff BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{7,0^2 - x^2} = \sqrt{49 - x^2}$$

Siden $AB \perp CD$ og $BC \perp AC$ står vinkelbena til $\angle ACD$ vinkelrett på vinkelbena til $\angle CBD$. Dermed er de to vinklene like, og siden begge trekantene BCD og ACD har en rett vinkel har de tre like store vinkler, og er følgelig formlike. Da er forholdet mellom lengste katet og hypotenus den samme i de to trekantene. Dette gir følgende ligning:

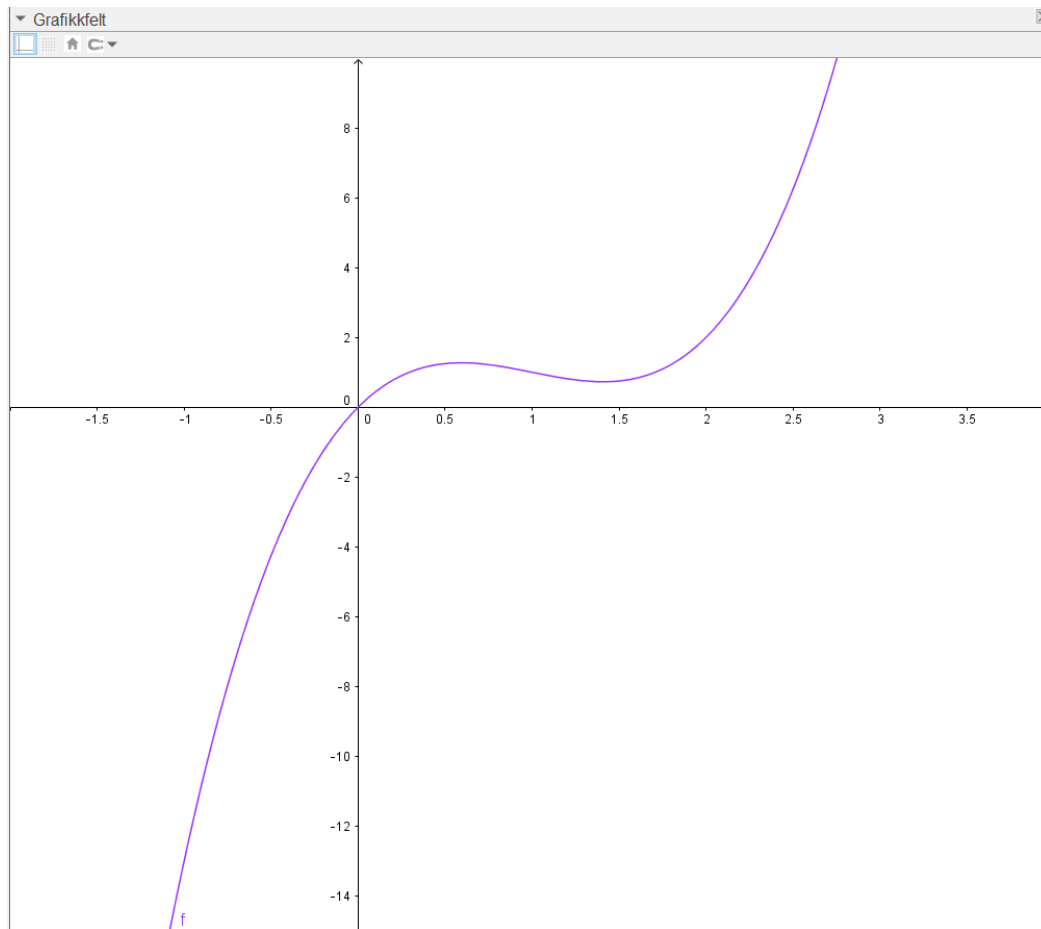
$$\frac{d}{x} = \frac{\sqrt{49 - x^2}}{7,0} \iff d = \frac{x\sqrt{49 - x^2}}{7,0}$$

3b)

Siden hypotenusen i ABC er 7,0 m lang må x ligge i intervallet $x \in [0, 7]$. Finner den maksimale lengden d ved å skrive 'Maks[x*sqrt(x^2 - 49)/7]' i inntastingsfeltet i GeoGebra. Finner at $d_{\text{maks}} = 3,5$ m.

4a)

Skriver 'f(x):=2x^3 - 6x^2 + 5x' i inntastingsfeltet i GeoGebra:



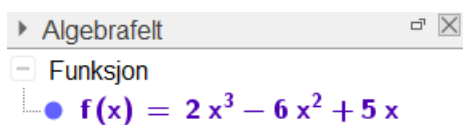
4b)

Tangentene har stigningstallet $f'(x)$, og går gjennom $(4, 3)$ og $(x, f(x))$. Kan da bruke definisjonen av stigningstallet til tangenten:

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - 3}{x - 4}$$

4c)

Bruker Løs-kommandoen i CAS for å finne x -verdiene. Bruker så Linje-kommandoen med to punkter på linjen for å finne ligningene for de tre linjene:



CAS	
1	Løs[(f(x)-3)/(x-4)=f'(x)] $\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2}, x = \frac{-\sqrt{15} + 7}{2}, x = \frac{\sqrt{15} + 7}{2} \right\}$
2	Linje[(1/2,f(1/2)), (4,3)] $\rightarrow y = \frac{1}{2} x + 1$
3	Linje[((7-sqrt(15))/2,f(7-sqrt(15)/2)),(4,3)] $\rightarrow y = \frac{1}{6} x \left(-\sqrt{15} \cdot 62 + 963 \right) + \frac{1}{3} \left(\sqrt{15} \cdot 124 - 1917 \right)$
4	Linje[((7+sqrt(15))/2,f(7+sqrt(15)/2)),(4,3)] $\rightarrow y = \frac{1}{6} x \left(\sqrt{15} \cdot 62 + 963 \right) + \frac{1}{3} \left(-\sqrt{15} \cdot 124 - 1917 \right)$

4d)

Gjentar prosedyren fra 4b), men med punktet (a, b) :

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - b}{x - a} \iff f(x) - b - f'(x)(x - a) = 0$$

Siden f er et tredjegradspolynom er $f'(x)$ et andregradspolynom. Da er $f'(x)(x - a)$ et polynom av tredje grad, og hele venstresiden er et polynom av (høyest) tredje grad. Dette polynomet kan da ha maksimalt 3 reelle løsninger, slik at det maksimale antallet tangenter er 3.