

Eksamen matematikk forkurs, vår 2015

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Forenkle uttrykket så mye som mulig:

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{a}}{b^3}\right)^2$$

$$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{a\sqrt{a}}{b^3}\right)^2 = \frac{a^{-8}}{b^{-4}} \cdot \frac{a^2 a}{b^6} = \frac{a^{-5}}{b^2} = \underline{\underline{\frac{1}{a^5 b^2}}}$$

b) Løs likningen ved regning:

$$4 \sin x - \sqrt{6} = \sqrt{2} \quad \text{der } x \in [0^\circ, 360^\circ >$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} 1) x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\right) = 75^\circ \\ 2) x_2 = 180^\circ - x_1 = 105^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{75^\circ, 105^\circ\}}}$$

c) Løs likningen ved regning:

$$3(\ln x)^2 - \ln x^5 - 2 = 0$$

$$3(\ln x)^2 - 5 \ln x - 2 = 0$$

2. gradslikningen gir vha. kalkulator eller 2. gradsformelen:

$$\left. \begin{array}{l} \ln x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = e^2 \\ \ln x = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{3}} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{x \in \{e^2, e^{-\frac{1}{3}}\}}}$$

d) Løs likningen ved regning:

$$\sqrt{x+2} - 2x = 1$$

$$\sqrt{x+2} = 2x + 1 \quad |(\cdot)^2 \Rightarrow x + 2 = (2x + 1)^2 \Leftrightarrow x + 2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x = -1 \quad \vee \quad x = \frac{1}{4}$$

Setter prøve:

$$x = -1: H.S. \neq V.S. \Rightarrow \text{ikke løsning}$$

$$x = \frac{1}{4}: H.S.: \frac{3}{2} - \frac{2}{4} = \frac{2}{2} = 1 = V.S. \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{4}} \text{ er eneste løsning.}}$$

e) Deriver funksjonen:

$$f(x) = x^2 \cdot \cos 2x$$

Produktregelen gir:

$$f'(x) = 2x \cdot \cos 2x + x^2 \cdot (-2 \sin 2x) = \underline{\underline{2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}$$

f) Regn ut det ubestemte integralet til funksjonen:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{2x}{x^2 - 1} dx$$

$$\text{Substitusjon med } u = x^2 - 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \underline{\underline{\ln|x^2 - 1| + C}}$$

g) Løs den doble ulikheten:

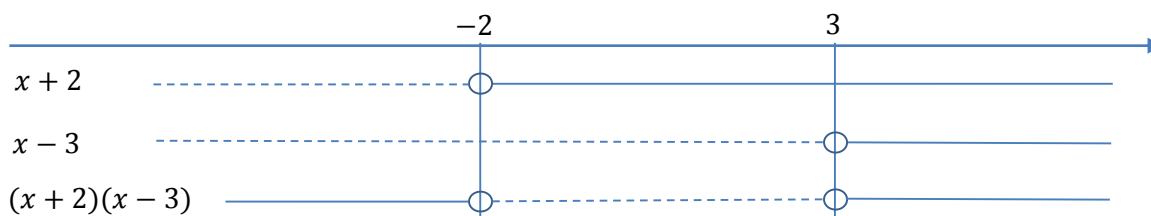
$$0 < x - 1 \leq x^2 - 7$$

Deler opp i 2 ulikheter:

$$1) \quad 0 < x - 1 \Leftrightarrow x > 1$$

$$2) \quad x - 1 \leq x^2 - 7 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) \geq 0$$

Fortegnslinje gir:



$$\left. \begin{array}{l} 1) \ x > 1 \\ 2) \ x \leq -2 \vee x \geq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{x \geq 3}}$$

h) Vi skal designe en vase med utgangspunkt i grafen til funksjonen:

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$

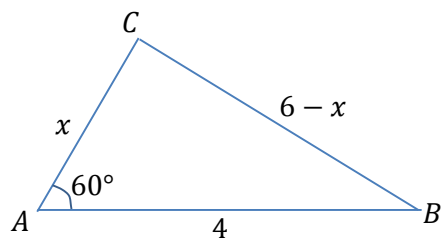
Vaseformen oppnås ved å la grafen til $f(x)$ mellom $x = 1$ dm og $x = 4$ dm danne konturen til et omdreiningslegeme om x -aksen. Hvor mye vann vil vasen kunne romme når konturen gir oss de indre veggene i vasen?

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 f^2(x) dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{4x^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_1^4 x^{-2} dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{1}{-1} x^{-1} \right]_1^4 = \frac{\pi}{4} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 \\ &= \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{1} \right) \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{16} \end{aligned}$$

Enheten er $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} \Rightarrow$ Vasen rommer $\frac{3\pi}{16} \text{ l}$ ($\approx 0,59 \text{ l}$) vann.

i) Gitt en trekant ABC, der $AB = 4$, $AC = x$, $BC = 6 - x$ og $\angle A = 60^\circ$.

Finn AC og $\angle B$.



Cosinussetningen:

$$(6 - x)^2 = x^2 + 4^2 - 2x \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ$$

$$36 - 12x + x^2 = x^2 + 16 - 4x \Leftrightarrow 20 = 8x \Leftrightarrow x = AC = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

Sinussetningen:

$$\frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin A}{BC}, \quad BC = 6 - AC = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\sin B = \sin 60^\circ \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{14} \Rightarrow \angle B = \sin^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right) = \underline{\underline{38,2^\circ}}$$

Oppgave 2

Gitt tre punkter $A(0, 0, 0)$, $B(3, 1, 0)$ og $C(2, 4, 0)$.

a) Regn ut vektorene \overrightarrow{CA} , \overrightarrow{CB} og $\angle C$.

$$\overrightarrow{CA} = [0 - 2, 0 - 4, 0 - 0] = \underline{\underline{[-2, -4, 0]}}$$

$$\overrightarrow{CB} = [3 - 2, 1 - 4, 0 - 0] = \underline{\underline{[1, -3, 0]}}$$

$\angle C$ finnes fra definisjon av skalarprodukt:

$$\cos \angle C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = [-2, -4, 0] \cdot [1, -3, 0] = (-2) \cdot 1 + (-4) \cdot (-3) = 10$$

$$\cos \angle C = \frac{10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \angle C = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{45^\circ}}$$

b) A, B og C utgjør tre av hjørnene i et parallelogram.

Vis at punktet D(-1, 3, 0) utgjør det siste hjørnet, når ABCD skal være et parallelogram.

$$\text{Parallelogram hvis } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB} = [-1, 3, 0]$$

$$\overrightarrow{AD} = [-1 - 0, 3 - 0, 0 - 0] = [-1, 3, 0] \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(-1, 3, 0)}} \text{ (siden A ligger i origo)}$$

c) ABCD utgjør grunnflaten i en pyramide med toppunkt T(1, 2, 5).

Vis og forklar hvorfor dette er en rett pyramide med kvadratisk grunnflate.

Punktene A, B, C og D ligger alle i xy -planet (z -koordinat lik 0). Da får vi en rett pyramide hvis linja fra T til midtpunktet M av grunnflata står normalt på xy -planet.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[2, 4, 0] = [1, 2, 0] \quad \Rightarrow \quad M(1, 2, 0)$$

Ser at midtpunktet M har samme x - og y -koordinat som T. Da står \overrightarrow{MT} vinkelrett på grunnflata i xy -planet. Pyramiden er dermed rett.

Alternativt kan man sjekke at:

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{MT} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MT} = 0$$

$$[1, 2, 0] \cdot [0, 0, 5] = 0 \quad \text{OK}$$

Hvis grunnflata skal være kvadratisk må:

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad \text{og} \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = [3, 1, 0] \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10} = |\overrightarrow{CB}| \\ [3, 1, 0] \cdot [1, -3, 0] = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{kvadratisk grunnflate}$$

d) Regn ut volumet til pyramiden ABCDT.

Siden grunnflata ABCD er et kvadrat, blir volumet:

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot h}{3}$$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$. $h = 5$ siden z -koordinaten til T er lik 5 og ABCD ligger i xy -planet.

$$V = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10} \cdot 5}{3} = \underline{\underline{\frac{50}{3}}}$$

Alternativt finnes arealet av grunnflata som $G = |\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}|$.

e) Regn ut arealet til sideflaten ABT.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot |[5, -15, 5]| = \frac{1}{2} \cdot 5|[1, -3, 1]| \\ &= \frac{5}{2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{11}}{2}}} \quad (\approx 8,29) \end{aligned}$$

f) Sideflaten ABT ligger i et plan α . Regn ut likningen for planet.

Likningen for et plan:

$$\alpha: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad \text{der:}$$

(x_0, y_0, z_0) er et punkt i planet og $\vec{n} = [a, b, c]$ er en normalvektor til planet.

Velger $(x_0, y_0, z_0) = A(0, 0, 0)$.

Fra pkt. e) fås en normalvektor for planet som: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT} = 5[1, -3, 1]$.

Velger kortest mulig normalvektor: $\vec{n} = [1, -3, 1]$. Likningen for planet blir da:

$$\alpha: 1(x - 0) + (-3)(y - 0) + 1(z - 0) = 0$$

$$\underline{\underline{\alpha: x - 3y + z = 0}}$$

Oppgave 3

En funksjon $f(x)$ er gitt som:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

a) Finn definisjonsmengden og evt. nullpunkter til $f(x)$.

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}}}$$

Evt. nullpunkter for $f(x) = 0$, dvs. når teller = 0 og nevner $\neq 0$.

$$2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$$

Nullpunkt: (0, 0)

b) Regn ut evt. asymptoter til funksjonen.

Def.: $x = x_0$ er V.A. hvis $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

For rasjonale polynomfunksjoner vil vi da finne V.A. når nevner = 0 og teller $\neq 0$:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$$

2 vertikale asymptoter: $x = 2 \wedge x = -2$

Grad teller = grad nevner \Rightarrow mulig H.A.:

Def.: $y = y_0$ er H.A. hvis $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0$.

Deler $f(x)$ med høyeste grad av x i teller og nevner:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 - \frac{4}{x^2}} = 2 \Rightarrow$$

Horisontal asymptote: $y = 2$

Dermed ingen skrå asymptoter.

c) Vis ved regning at:

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}$$

Kvotientregelen med $u = 2x^2 \Rightarrow u' = 4x$ og $v = x^2 - 4 \Rightarrow v' = 2x$:

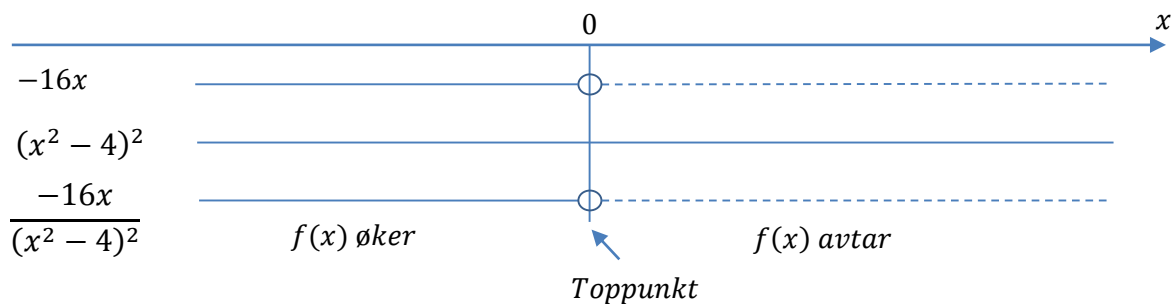
$$f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{4x(x^2 - 4) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{4x^3 - 16x - 4x^3}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

d) Regn ut evt. topp- og bunnpunkter for grafen til $f(x)$.

Topp-/bunnpunkt for $f'(x) = 0 \Rightarrow$ teller = 0 og nevner \neq 0:

$$-16x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Fortegnsdrøfting:



Toppunkt for $x = 0$: $f(0) = 0 \Rightarrow$ Toppunkt: (0, 0)

e) Finn eventuelle vendepunkter til $f(x)$.

Vendepunkter for $f''(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$u = -16x \Rightarrow u' = -16 \text{ og } v = (x^2 - 4)^2 \Rightarrow v' = 2(x^2 - 4)2x = 4x(x^2 - 4)$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-16(x^2 - 4)^2 - (-16x)4x(x^2 - 4)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{16(x^2 - 4)[-(x^2 - 4) + 4x^2]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{16(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}
 \end{aligned}$$

Teller $\neq 0$ for alle verdier av $x \Rightarrow f''(x) \neq 0$, dermed har vi ingen vendepunkter.

Oppgave 4

Blant 3 lokale fotballklubber skal det plukkes ut 2 medlemmer til å delta på Rosenborgs fotballakademi. Disse trekkes ut tilfeldig blant alle medlemmene i klubbene. Klubb A har 250 medlemmer, klubb B har 100 medlemmer og klubb C har 50 medlemmer.

a) Hva er sannsynligheten for at begge de heldige kommer fra klubb A?

$$n_A = 250, \quad n_B = 100, \quad n_C = 50, \quad N = n_A + n_B + n_C = 400$$

$$\begin{aligned}
 P(AA) &= P(\text{klubb A i 1. trekning}) \cdot P(\text{klubb A i 2. trekning}) = \frac{n_A}{N} \cdot \frac{n_A - 1}{N - 1} \\
 &= \frac{250}{400} \cdot \frac{249}{399} = \frac{415}{1064} \approx 0,39
 \end{aligned}$$

b) Hva er sannsynligheten for at bare én av de to kommer fra klubb A?

Her må sannsynlighetene for alle valgmuligheter som inkluderer klubb A i enten bare første eller bare andre valg summeres:

$$\begin{aligned}
 P(\text{kun én fra klubb A}) &= P(AB) + P(BA) + P(AC) + P(CA) \\
 &= \frac{250}{400} \cdot \frac{100}{399} + \frac{100}{400} \cdot \frac{250}{399} + \frac{250}{400} \cdot \frac{50}{399} + \frac{50}{400} \cdot \frac{250}{399} = \frac{250 + 125}{798} \\
 &= \frac{375}{798} = \frac{125}{266} \approx 0,47
 \end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi skal konstruere et høydebasseng som skal forsyne et område med vann. Bassenget skal utformes som en lukket, sylindrisk tank med et volum på 800 m^3 .

a) Finn høyden h i cylinderen uttrykt vha. radiusen r . Anta at r og h måles i meter.

$$V = \pi r^2 h \Leftrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{800}{\underline{\underline{\pi r^2}}}$$

b) Forklar hvorfor overflaten til cylinderen (målt i m^2) kan uttrykkes som:

$$O = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}$$

Overflaten O består av to sirkelflater og én rektangulær flate (utrullet) med bredde lik omkretsen til sirkelflaten:

$$O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{800}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1600}{r}$$

c) Vi ønsker å bruke minst mulig materialer når sylindertanken skal utformes. Regn ut høyden h og radiusen r i dette tilfellet.

$$O(r) = 2\pi r^2 + 1600r^{-1}$$

$$O_{\min} \text{ for } O'(r) = 0$$

$$O'(r) = 4\pi r - 1600r^{-2}$$

$$4\pi r - 1600r^{-2} = 0 \quad | \cdot r^2 \Leftrightarrow 4\pi r^3 - 1600 = 0 \Leftrightarrow r^3 = \frac{1600}{4\pi} = \frac{400}{\pi}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} = 5,031 \approx 5$$

$$h = \frac{800}{\pi r^2} = \underline{\underline{10,062 \approx 10}}$$

Alle enheter er i meter.

Oppgave 6

I en uendelig geometrisk rekke er $a_2 = \frac{1}{2}$ og $a_5 = \frac{1}{16}$.

a) Regn ut a_1 og kvotienten k for rekken. Forklar hvorfor rekken er konvergent.

$$a_5 = a_4k = a_3k^2 = a_2k^3 \Rightarrow k^3 = \frac{a_5}{a_2} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$a_2 = a_1k \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_2}{k} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1}}$$

Rekka er konvergent fordi $|k| < 1$

b) Vi skal nå benytte de n første leddene i rekken. Vi ønsker at summen S_n av den endelige rekken og summen S av den uendelige rekken skal oppfylle betingelsen:

$$S - S_n < 0,0001$$

Hvor mange ledd må vi da ha med i den endelige rekken?

Summen av den konvergente, uendelige rekken:

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Summen av de n første leddene i den endelige rekken:

$$S_n = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - (\frac{1}{2})^n)$$

$$S - S_n < 0,0001 \Leftrightarrow 2 - 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 0,0001 \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,0001 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,00005$$

$\ln(\cdot)$ er en monotont økende funksjon. Vi kan derfor ta $\ln(\cdot)$ på begge sider av ulikheten uten at ulikheten endres:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,00005 \quad |\ln(\cdot)| \Leftrightarrow n \cdot \ln \frac{1}{2} < \ln 0,00005 \quad | : \ln \left(\frac{1}{2}\right)$$

Merk at $\ln \frac{1}{2} < 0$. Vi må derfor snu ulikhetstegnet ved divisjon med $\ln \frac{1}{2}$:

$$n > \frac{\ln 0,00005}{\ln \frac{1}{2}} \Leftrightarrow n > 14,3 \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 15}}$$