

Eksamen 1T, Høsten 2011

Del 1

Tid: 2 timer

Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1 (16 poeng)

a)



Hvor mye koster én flaske vann, og hvor mye koster ett eple?

To flasker vann og to epler koster 40 kroner.

Én flaske vann og ett eple koster da 20 kroner.

Én flaske vann og tre epler koster 32 kroner.

$$32 - 20 = \underline{12}$$

To epler koster da 12 kroner.

Ett eple koster 6 kroner.

$$20 - 6 = \underline{14}$$

Én flaske vann koster 14 kroner.

b) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{8}}{2^2}$$

$$\frac{4^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{8}}{2^2} = \frac{2 \cdot 2}{4} = \underline{\underline{1}}$$

c) Dersom vinklene i en trekant er 30° , 60° og 90° , er hypotenusen dobbelt så lang som den korteste kateten.

Bruk dette til å finne $\sin 30^\circ$.

Den minste vinkelen har den korteste motstående kateten.

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{motstående katet til vinklen som er } 30^\circ}{\text{hypotenus}} = \frac{\text{korteste katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2}$$

d) Eva har én pakke blåbærgelé, to pakker kiwigelé, to pakker sitrongelé og tre pakker bringebærgelé.

Hun tar tilfeldig to pakker gelé.

1) Hva er sannsynligheten for at den første pakken hun tar, er kiwigelé?

$$P(\text{Den første pakken er kiwigelé}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2) Hva er sannsynligheten for at hun tar to pakker kiwigelé?

$$P(\text{To pakker kiwigelé}) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{28}$$

3) Hva er sannsynligheten for at hun tar én pakke kiwigelé og én pakke blåbærgelé?

$$P(\text{Én pakke kiwigelé og én pakke blåbærgelé}) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} = 2 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{14}$$

e) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \frac{(x-4)(x-4)}{(x-4)(x+4)} = \frac{x-4}{\underline{\underline{x+4}}}$$

f) Regn ut

$$(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$$

$$(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2 = 8 - 2\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} + 2 = 8 - 8 + 2 = \underline{\underline{2}}$$

g) De gamle egypterne påsto følgende:

”For å finne arealet av en sirkel kan du først multiplisere diameteren med $\frac{8}{9}$ og så opphøye resultatet du får, i andre.”

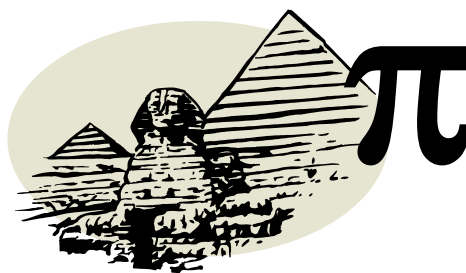
Vis at egypterne brukte verdien $\frac{256}{81}$ for π .

Arealet av en sirkel er $A = \pi \cdot r^2$

Egypterne regnet slik

$$A = \left(d \cdot \frac{8}{9}\right)^2 = 2^2 \cdot r^2 \cdot \frac{64}{81} = \frac{256}{81} \cdot r^2$$

Dette viser at egypterne brukte verdien $\frac{256}{81}$ for π .



Oppgave 2 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^2 + 2x - 8$.

a) Finn nullpunktene til f ved regning.

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\x^2 + 2x - 8 &= 0 \\x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \\x &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} \\x &= \frac{-2 \pm 6}{2} \\x &= \underline{2} \quad \vee \quad x = \underline{-4}\end{aligned}$$

Nullpunktene er $(2, 0)$ og $(-4, 0)$

b) Bruk $f'(x)$ til å finne eventuelle ekstremalpunkter på grafen til f .

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + 2x - 8 \\f'(x) &= \underline{2x + 2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\2x + 2 &= 0 \\x &= \underline{-1}\end{aligned}$$

Grafen til f har et ekstremalpunkt for $x = \underline{-1}$

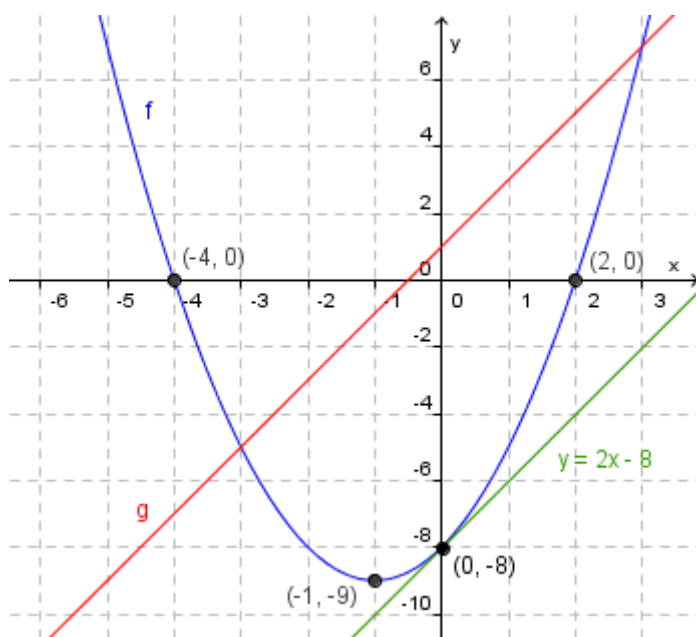
$$f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 8 = \underline{-9}$$

Siden andregradsleddet er positivt, er ekstremalpunktet et bunnpunkt.

Bunnpunktet er $(-1, -9)$

c) Lag en skisse av grafen til f .

Her har vi tegnet grafen til f sammen med grafen til g (se nedenfor) og tangenten i d).



Funksjonen g er gitt ved $g(x) = 2x + 1$.

Grafen til f har en tangent som er parallell med grafen til g .

d) Finn likningen for denne tangenten.

Tangenten har stigningstall 2.

$$f'(x) = 2x + 2$$

$$f'(x) = 2$$

$$2x + 2 = 2$$

$$2x = 0$$

$$x = \underline{0}$$

$$f(0) = (0)^2 + 2 \cdot (0) - 8 = \underline{-8}$$

Vi bruker ettpunktsformelen

$$\begin{aligned}y - y_1 &= a(x - x_1) \\y - (-8) &= 2(x - 0) \\y &= \underline{2x - 8}\end{aligned}$$

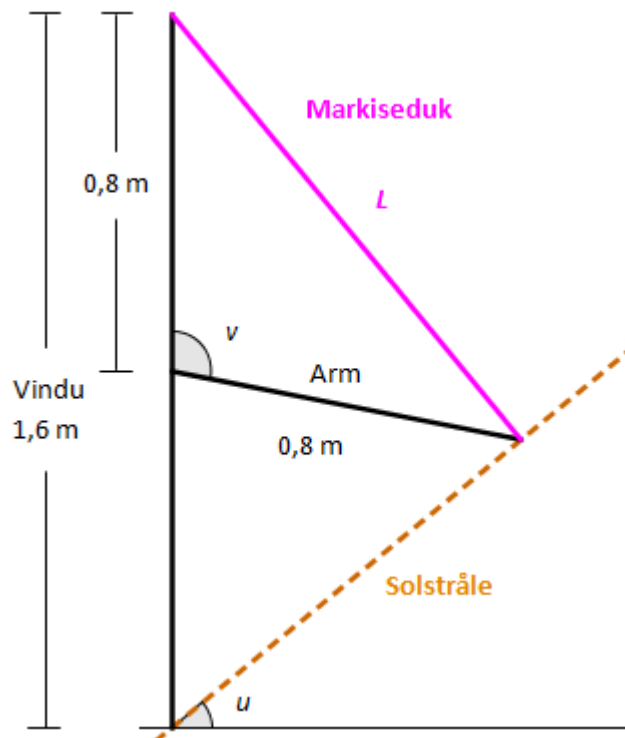
Likningen for tangenten er $y = 2x - 8$

Del 2

Tid: 3 timer

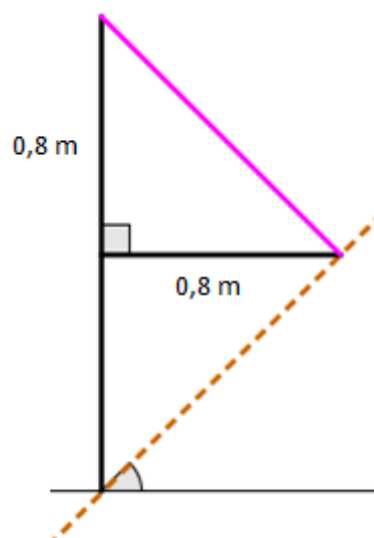
Hjelpemidler: Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 3 (6 poeng)



Fredrik har montert en markise for å hindre sollys fra å komme inn gjennom et vindu. Tegningen ovenfor viser vindu og markise sett fra siden.

- a) Regn ut lengden L av markiseduken når markisens armer ligger vannrett, dvs. når $\angle v = 90^\circ$.



Vi får da en rettvinklet trekant.

Vi bruker Pytagoras' setning og regner i wxMaxima.

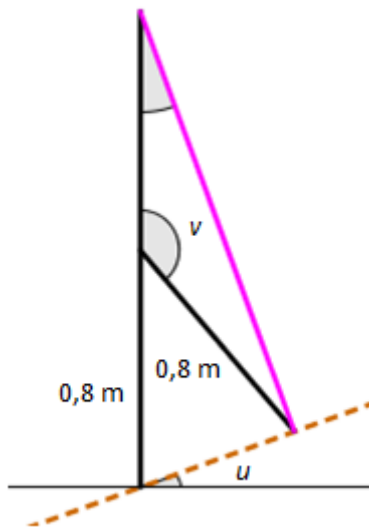
```
sqrt(0.8^2+0.8^2);
```

```
1.13137
```

Duken må være ca. 1,13 m.

Fredrik ønsker at markisen skal ta bort alle solstråler når $\angle u = 20^\circ$.

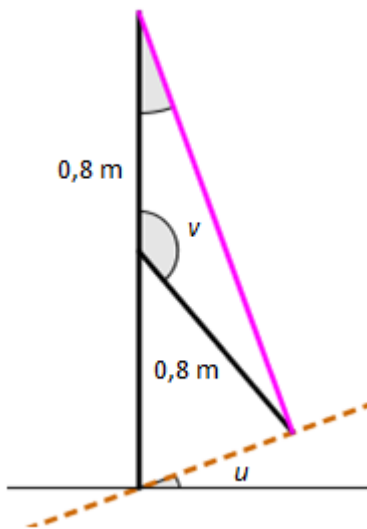
b) Forklar at da må $\angle v = 140^\circ$.



Vi har en likebeint trekant.

$$\angle v = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot (90^\circ - 20^\circ)) = 180^\circ - (180^\circ - 2 \cdot 70^\circ) = \underline{140^\circ}$$

c) Regn ut lengden L når $\angle v = 140^\circ$.



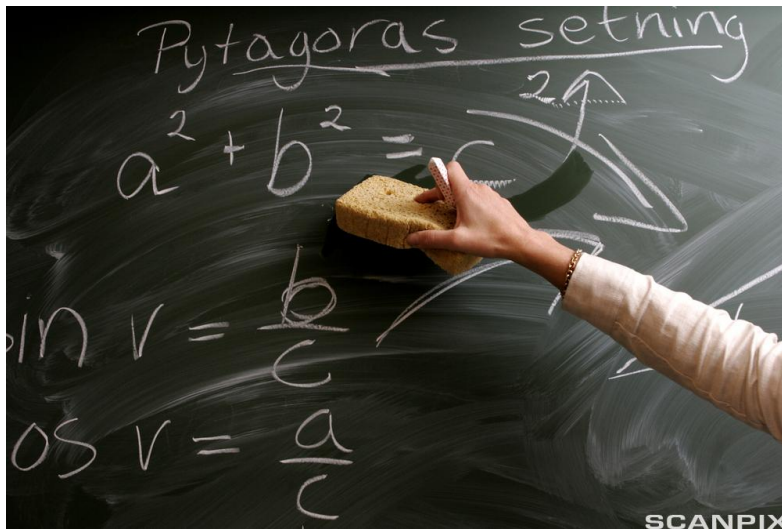
Vi bruker cosinussetningen og regner i wxMaxima.

```
wx_compute_wrt (x^2=0.8^2+0.8^2-2*0.8*0.8*Cos(140), x);
[ x = - 1.50351 , x = 1.50351 ]
```

Lengden av duken må være en positiv størrelse, vi ser derfor bort fra den negative løsningen.

Duken må være ca. 1,5 m.

Oppgave 4 (6 poeng)



I 2009 gjennomførte TNS Gallup en undersøkelse på oppdrag fra Kunnskapsdepartementet. Undersøkelsen viste at 16 % av elevene som gikk siste året på videregående skole, kunne tenke seg å bli lærere.

Anta at andelen er like stor i dag.

Vi velger tilfeldig 20 elever som går siste året på videregående skole.

a) Hva er sannsynligheten for at ingen av elevene kan tenke seg å bli lærere?

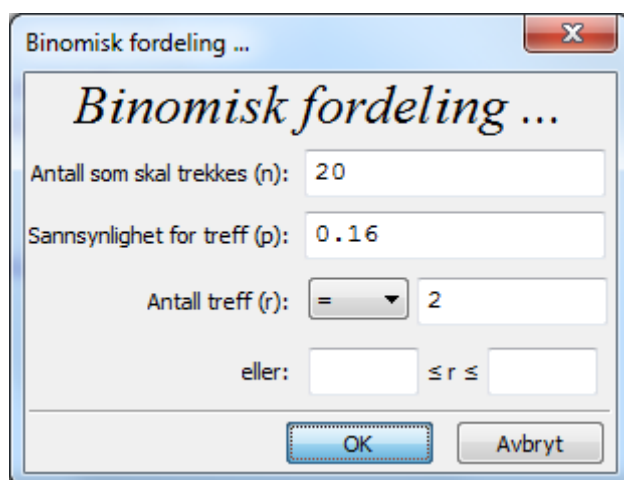
$$(1-0.16)^{20};$$

$$0.03059$$

Sannsynligheten for at ingen av elevene kunne tenke seg å bli lærere er ca. 3,1 %.

b) Hva er sannsynligheten for at akkurat to av elevene kan tenke seg å bli lærere?

Vi bruker wxMaxima.



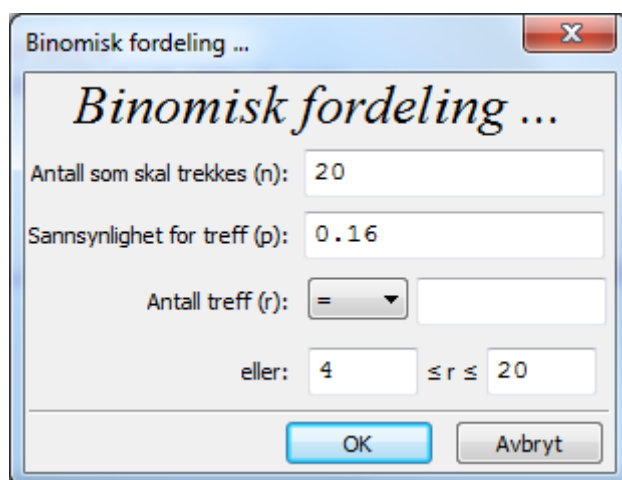
```
pdf_binomial(2,20,0.16),numer;
```

0.2109

Sannsynligheten for at akkurat to av elevene kunne tenke seg å bli lærere er ca. 21%.

- c) Hva er sannsynligheten for at minst fire av elevene kan tenke seg å bli lærere?

Vi bruker wxMaxima.



```
cdf_binomial(20,20,0.16)-cdf_binomial(4-1,20,0.16),numer;  
0.401
```

Sannsynligheten for at minst fire av elevene kan tenke seg å bli lærere er ca. 40 %.

Oppgave 5 (6 poeng)



Et fly har en gjennomsnittshastighet på 600 km/h når det ikke er vind.
Hastigheten øker i medvind og avtar i motvind:

Gjennomsnittshastighet i medvind = 600 km/h + vindhastigheten

Gjennomsnittshastighet i motvind = 600 km/h – vindhastigheten

En dag skal flyet dra til et sted som ligger 1050 km borte. Der snur det og drar tilbake uten å lande.
Flyet har medvind på vei til stedet og motvind på vei tilbake. Vi ser bort fra den ekstra tiden det tar å
snu. Vindhastigheten denne dagen er 100 km/h.

a) Vis at hele flyturen tar 3 timer og 36 minutter.

$$1050 / (600 + 100) ;$$

$$1.5$$

$$1050 / (600 - 100) ;$$

$$2.1$$

$$1.5 + 2.1 ;$$

$$3.6$$

$$0.6 * 60 ;$$

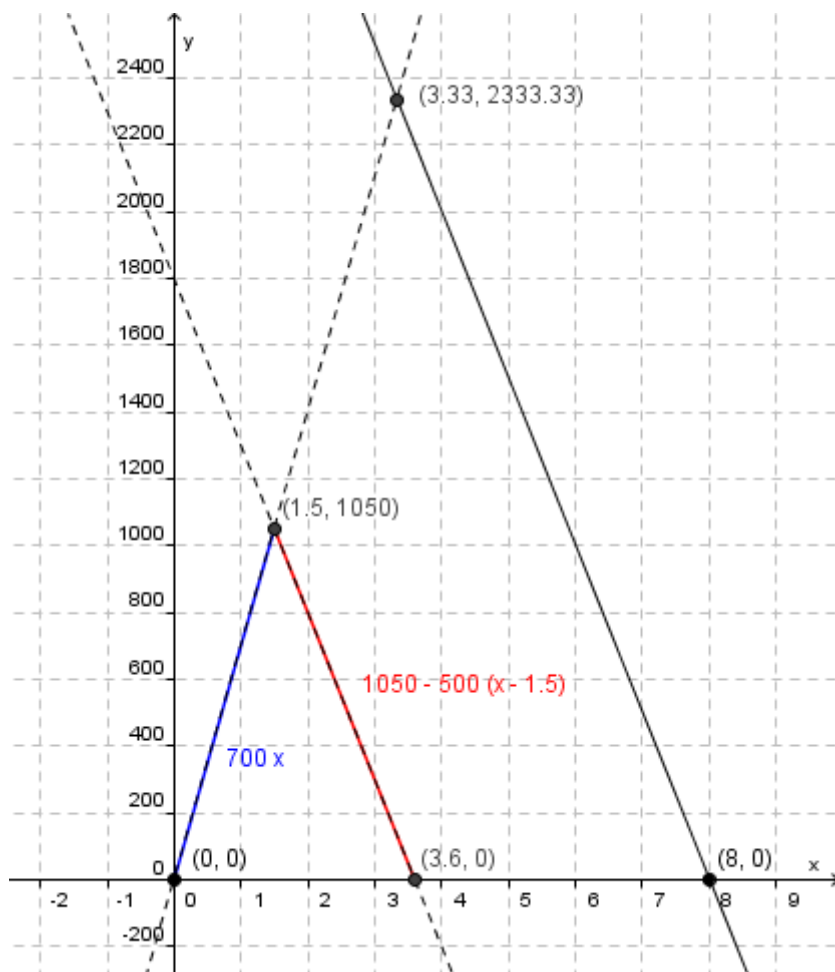
$$36.0$$

Flyturen tar 3 timer og 36 minutter.

- b) Lag et koordinatsystem der x - akse viser hvor lang tid flyet har vært i luften, og y - akse viser avstand fra startstedet. Tegn en graf som viser flyets avstand fra startstedet som funksjon av tiden.

I koordinatsystemet nedenfor har vi tegnet grafen (markert med blått og rødt).

Vi har også lagt inn en grafisk løsning av oppgave c) som viser at hvis flyet har nok drivstoff til å holde seg på vingene i 8 timer, kan det kjøre ca. 2 333 km før det må snu.



I resten av oppgaven antar vi også at flyet skal dra til et sted og tilbake uten å lande. Flyet har medvind på vei til stedet og motvind på vei tilbake. Vi ser bort fra tiden det tar å snu. Vindhastigheten er 100 km/h.

Flyet har drivstoff nok til å holde seg på vingene i 8 timer.

c) Hvor langt kan flyet maksimalt dra før det må snu?

Vi setter tiden flyet kan bruke den ene veien lik t_1 og tiden flyet kan bruke den andre veien lik t_2 .

Flyet kan være på vingene i totalt 8 timer.

Farten vil være 700 km/h den ene veien og 500 km/h den andre.

Strekning er fart multiplisert med tid. Strekningen den ene veien er lik strekningen den andre veien.

Vi bruker wxMaxima og løser to likninger med to ukjente.

```
solve([t_1+t_2=8, 700*t_1=500*t_2], [t_1,t_2]);
```

```
[ [ t_1 = 3.33333 , t_2 = 4.66667 ] ]
```

```
700*3.33;
```

```
2331.0
```

Flyet kan maksimalt dra til et sted som er 2 331 km borte.

Oppgave 6 (10 poeng)

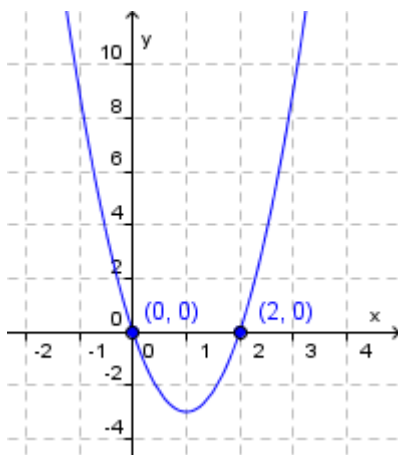
Funksjonen f er gitt ved $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$

- a) Finn $f'(x)$ og bruk den deriverte til å finne topp- og bunnpunkter på grafen til f når $a = -2$ og når $a = 5$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Grafen til f har et toppunkt eller et bunnpunkt der den deriverte er lik null og skifter fortegn. Vi tegner grafen til den deriverte i GeoGebra og bruker "skjæring mellom to objekter" for å finne nullpunktene.



Grafen til f har toppunkt når $x = 0$ fordi den deriverte er lik null og går fra å være positiv (grafene til f stiger når den deriverte er positiv) til å være negativ (grafene til f synker når den deriverte er negativ) her.

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + a = \underline{a}$$

Toppunktet er $(0, \underline{a})$

Grafen til f har bunnpunkt når $x = 2$ fordi den deriverte er lik null og går fra å være negativ (grafene til f avtar når den deriverte er negativ) til å være positiv (grafene til f stiger når den deriverte er positiv) her.

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a = \underline{-4 + a}$$

Bunnpunkt $(2, \underline{-4 + a})$

$a = -2$ gir

Toppunkt $(0, a) = \underline{\underline{(0, -2)}}$

Bunnpunkt $(2, -4 + a) = \underline{\underline{(2, -6)}}$

$a = 5$ gir

Toppunkt $(0, a) = \underline{\underline{(0, 5)}}$

Bunnpunkt $(2, -4 + a) = \underline{\underline{(2, 1)}}$

b)

- 1) Finn stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(1, f(1))$ når $a = -2$, og når $a = 5$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(1) = 3 - 6 = \underline{\underline{-3}}$$

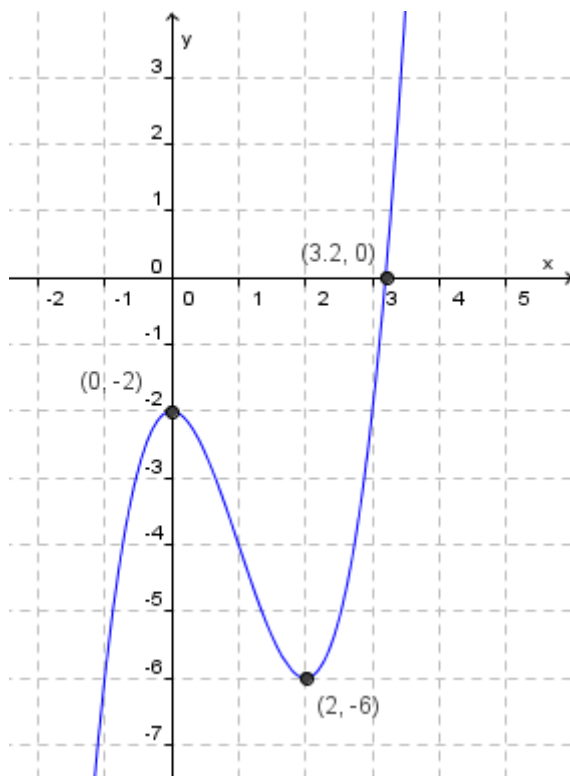
- 2) Forklar hvorfor tangentene til grafene til f i punktet $(1, f(1))$ er parallelle for alle verdier av a .

Tangentene har samme stigningstall, og er derfor parallelle.

- c) Lag en skisse av grafen til f når $a = -2$, og når $a = 5$.
Marker topp- og bunnpunkter.

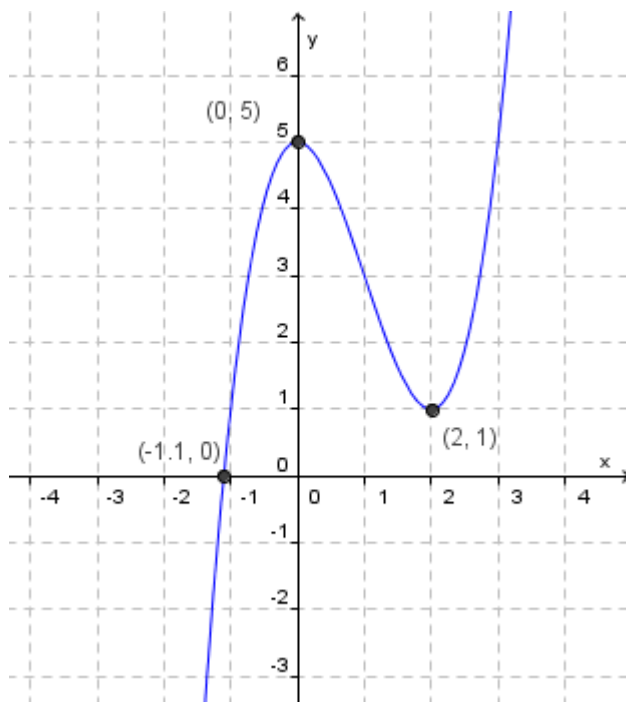
$$a = -2$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$$



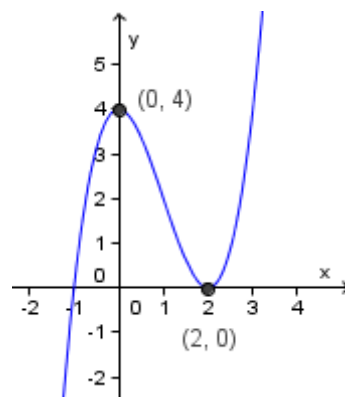
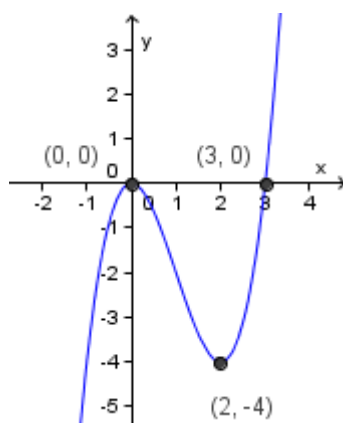
$$a=5$$

$$f(x)=x^3-3x^2+5$$



d) For hvilke verdier av a har likningen $f(x)=0$ nøyaktig én løsning?

Likningen har to løsninger når et toppunkt eller et bunnpunkt også er et nullpunkt.



I a) fant vi at grafen til f har toppunkt når $x=0$ og et bunnpunkt når $x=2$.

Dersom et topp- eller ett bunnpunkt skal være et nullpunkt, må

$$f(0)=0 \text{ eller } f(2)=0$$

$$\begin{array}{ll} f(0)=0 & f(2)=0 \\ 0^3 - 3 \cdot 0^2 + a = 0 & 2^3 - 3 \cdot 2^2 + a = 0 \\ a = \underline{0} & a = -8 + 12 \\ & a = \underline{4} \end{array}$$

Vi ser da av formen på grafen at likningen har nøyaktig én løsning når $a \in \langle \leftarrow, 0 \rangle \cup \langle 4, \rightarrow \rangle$.

Oppgave 7 (8 poeng)



Strekningen s meter en jernkule som slippes, faller i løpet av tiden t sekunder, er gitt ved

$$s = 4,9 \cdot t^2$$

Oslo Plaza, en av Norges høyeste bygninger, er ca. 117 m høy.

Tenk deg at en jernkule slippes fra toppen av Oslo Plaza.

a) Hvor lang tid vil det ta før kulen treffer bakken?

$$\text{sqrt}(117/4.9);$$

$$4.88647$$

Det vil ta ca. 4,9 sekunder før kulen treffer bakken.

b) Hvor langt faller kulen i løpet av det første sekundet?

$$4.9 * 1^2;$$

$$4.9$$

I løpet av det første sekundet vil kulen falle ca. 4,9 meter.

Hvor langt faller kulen i løpet av det andre sekundet?

$$4.9 \cdot 2^2 - 4.9;$$

$$14.7$$

I løpet av det andre sekundet vil kulen falle ca. 14,7 meter.

Hvor langt faller kulen i løpet av det tredje sekundet?

$$4.9 \cdot 3^2 - 4.9 - 14.7;$$

$$24.5$$

I løpet av det tredje sekundet vil kulen falle 24,5 meter.

Tenk deg at en person slipper en jernkule fra toppen av Oslo Plaza. Et sekund senere slipper en annen person, som står ved et vindu 10 m nedenfor toppen, en tilsvarende jernkule.

- c) Bruk for eksempel resultatet i b) til å forklare at kulen som slippes fra toppen, tar igjen kulen som slippes fra vinduet.

I løpet av det første sekundet etter at kulen er sluppet fra vinduet, vil den falle 4,9 meter.

Kulen som slippes fra toppen, faller i løpet av dette sekundet 14,7 meter.

Den har da falt til sammen $4,9\text{m} + 14,7\text{m} = \underline{19,6\text{m}}$

Kulen som slippes fra toppen har da falt mer enn 10 meter lenger en kulen som slippes fra vinduet, og har derfor tatt igjen denne.

- d) Hvor lang tid går det fra den første kulen slippes, til de to kulene er i samme høyde? Hvor høyt over bakken er kulene da?

Når begge kulene er i samme høyde, sier vi at de er y meter over bakken.

Den første kula har da falt $(117 - y)$ meter.

Den andre kula har falt $(117 - 10 - y = 107 - y)$ meter.

Den første kula har falt i x sekunder.

Den andre kula har falt i $(x - 1)$ sekunder.

Vi bruker formelen $s = 4,9 \cdot t^2$ og får

$$117 - y = 4,9 \cdot x^2$$

$$107 - y = 4,9 \cdot (x - 1)^2$$

Vi bruker wxMaxima og løser likningssettet.

```
solve([117-y=4.9*x^2, 107-y=4.9*(x-1)^2], [x,y]);
```

```
x=1.52041, y=105.673
```

Det går ca. 1,52 s før kulene er i samme høyde.

Kulene er da ca. 105,7 m over bakken.

Bildeliste

Imsdal 

Foto: Ringnes

Eple 

Foto: Sophie Aaserud/Aftenposten/Scanpix

Markise 

Bilde: Utdanningsdirektoratet

Fly 

Foto: Scanpix

Matematikklærer 

Foto: Bjørn Sigurdson/Scanpix

Oslo Plaza 

Foto: Trond J. Strøm/Aftenposten/Scanpix