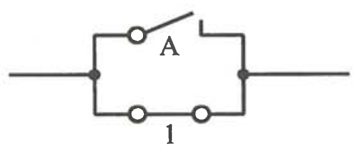
5 Boolsk algebra

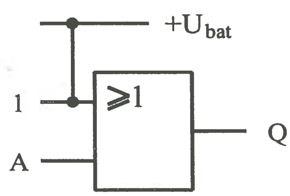
Hensikt
Du skal nå gjennom en rekke Boolske uttrykk og tilegne deg kunnskaper om hvordan disse kan forenkles. Når du er ferdig med disse undersøkelsene, skal du være i stand til å lage et funksjonstabell (sannhetstabell) når du har den Boolske formelen. Du skal også kunne lage den motsatte prosessen.

Eksempel nr.1 $Q = A+1$

Plusstegnet betyr at dette må være en parallellkopling. Tallet 1 er en konstant logisk verdi som ikke kan endres. Derfor må bryterkoplingen være slik:



Plusstegnet forteller at vi må benytte en ELLER-port. Tallet 1 er en konstant HØY verdi som kan tas fra batterispenningen. Det er kun en variabel verdi. Den logiske koplingen må derfor være slik:



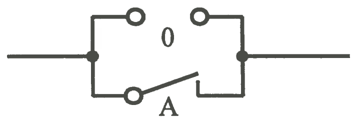
En ELLER-port med konstant 1 på den ene inngangen har konstant 1 på Q-utgangen. Funksjonstabellen har dermed logisk 1 på utgangen uansett om A er 0 eller 1.

A	Q
0	1
1	1

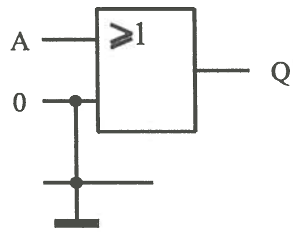
Konklusjon
Regneregelen sier derfor at: $Q = A+1 = 1$

Eksempel nr.2 $Q = A+0$

Plusstegnet betyr at dette må være en parallellkopling. Tallet 0 er en konstant verdi. Her er bryterkoplingen:



Plusstegnet betyr at vi må benytte en ELLER-port. Tallet 0 er en konstant LAV verdi som kan tas fra nullinjen. Det er derfor kun en variabel verdi. Her er den logiske koplingen:



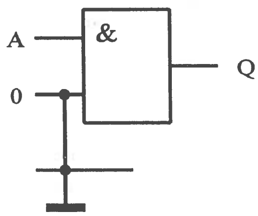
En ELLER-port gir en logisk 1 når bare en inngang er logisk 1. Når det er logisk 0 på begge inngangene, er Q logisk 0. Funksjonstabellen viser dermed at verdien på Q-utgangen følger verdien på A-inngangen.

A	Q
0	0
1	1

Konklusjon
Regneregelen sier derfor at: $Q = A + 0 = A$

Eksempel nr.3 $Q = A \cdot 0$

Multiplikasjonstegnet forteller at dette må være en OG-port. Den logiske verdien 0 er en konstant verdi, og denne inngangen må derfor koples konstant til null. Det er kun en variabel. En OG-port med konstant 0 på en inngang har en Q-verdi som alltid må være logisk 0. Portkopling og sannhetsskjema er vist under. Du skal selv fylle ut sannhetstabellen.

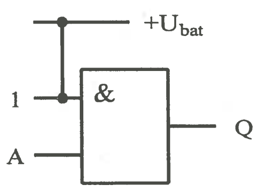


A	Q
0	
1	

Konklusjon
Regneregelen sier derfor at: $Q = A \cdot 0 = 0$

Eksempel nr.4 $Q = A \cdot 1$

Multiplikasjonstegnet viser at dette også må være en OG-port. Den konstante logiske verdien på 1 kan tas fra forsyningsspenningen. Det er kun en variabel. Når den blir logisk 1, vil Q bli 1 fordi det er konstant 1 på den andre inngangen. Verdien 0 på A vil gi 0 på Q. Du skal selv fylle ut sannhetstabellen.



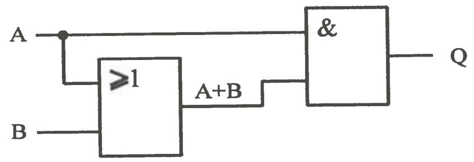
A	Q
0	
1	

Konklusjon
Regneregelen er slik: $Q = A \cdot 1 = A$

Eksempel nr.5

Vi skal her undersøke følgende Boolske uttrykk: $Q = A \cdot (A + B)$

Dette uttrykket kan realiseres ved hjelp av en **OG-port** og en **ELLER-port**. Den må derfor ha et sannhetstabell som vist under:



B	A	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

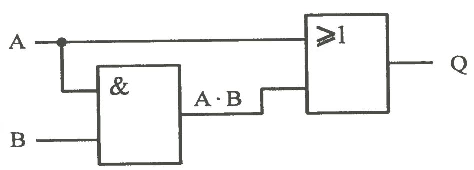
Konklusjon
Ut fra sannhetsskjemaet kan du se at verdien på Q-utgangen følger verdien på A-utgangen uavhengig av verdien på B.

Regneregelen er derfor: $Q = A \cdot (A + B) = A$

Eksempel nr.6

Her er et uttrykk som likner mye på det forrige eksemplet: $Q = A + (A \cdot B)$

Dette uttrykket kan bygges opp ved hjelp av to porter. Du skal fylle ut sannhetstabellen og sammenlikne denne med eksempel nr. 5.



B	A	Q
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

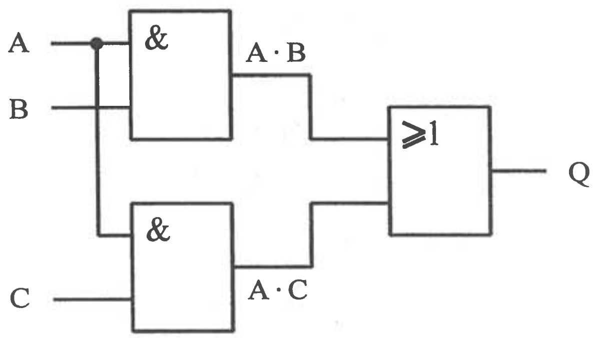
Konklusjon.
Vi kan også se her at verdien på Q-utgangen følger verdien på A-inngangen uansett hvilken verdi B-inngangen har. Skriv selv regneregelen ferdig:

$Q = A + (A \cdot B) =$

Eksempel nr. 7
Her skal vi undersøke et Boolsk uttrykk som kan bygges opp av flere porter. Uttrykket har to parenteser med gangetegn. Dette indikerer at her må det være to OG-porter. Mellom de to parentesene er det et plusstegn som betyr en ELLER-port.

$$Q = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

ELLER-porten vil gi fra seg en logisk 1 når en av OG-portene gir fra seg en logisk 1. OG-portene må ha logisk 1 på begge innganger for å gi en logisk 1. ELLER-porten gir også logisk 1 når begge inngangene får logisk 1. Fyll ut sannhetstabellen.

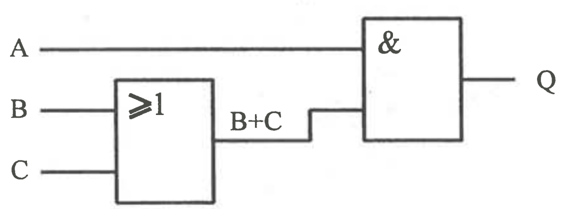


C	B	A	Q
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Den variable verdien A er til stede i begge leddene. Den kan derfor settes utenfor parentesene.

$$Q = (A \cdot B) + (A \cdot C) = A \cdot (B + C)$$

Det er nå et gangetegn og et plusstegn. Derfor må kretsen ha en OG-port og en ELLER-port. OG-porten må ha to innganger med logiske 1, hvis den skal gi fra seg en logisk 1. A-inngangen må derfor være logisk 1 samtidig med at B eller C eller begge er logisk 1. Fyll ut tabellen:



C	B	A	Q
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

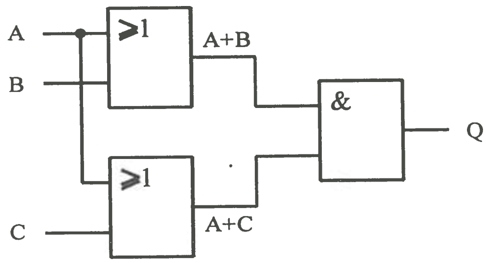
Konklusjon
Hvis to forskjellige logiske kretser har samme sannhetsskjema, må de Boolske formlene for kretsene være like: $Q = (A \cdot B) + (A \cdot C) = A \cdot (B + C)$

Eksempel nr. 8

Her er det igjen en undersøkelse av et Boolsk uttrykk med to parenteser. Det er to parenteser med en ELLER-port og en OG-port.

$$Q = (A + B) \cdot (A + C)$$

OG-porten vil gi fra seg en logisk 1 når begge ELLER-portene samtidig gir fra seg en logisk 1. Fyll ut tabellen:

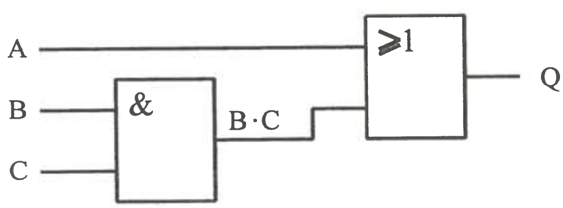


C	B	A	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Hvis to forskjellige logiske kretser har samme sannhetsskjema, må de Boolske formlene for kretsene være like. Foreta en vurdering av denne formelen:

$$Q = A + (B \cdot C)$$

Ut fra formelen ser vi at det Boolske uttrykket er forenklet. Det er her kun to porter: en OG-port og en ELLER-port. Hvis det skal være logisk 1 på utgangen, må det være logisk 1 på A eller på B og C samtidig eller på A og B og C samtidig. Fyll ut tabellen:



C	B	A	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Konklusjon

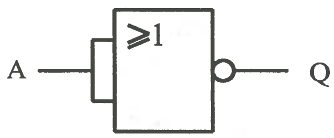
Hvis to forskjellige logiske kretser har samme sannhetsskjema, må de Boolske formlene for kretsene være like.

$$Q = (A + B) \cdot (A + C) = A + (B \cdot C)$$

Eksempel nr. 9
Når en ELLER-port blir invertert på utgangen, vil verdiene på Q naturligvis bli vendt om. Dette er vist tidligere. Her er det en kopling av en IKKE-ELLER-port hvor inngangene er koplet sammen. Begge innganger mottar derfor samme logiske verdi.

$$Q = \overline{A + A}$$

Det er kun en variabel. En ELLER-port som har begge inngangene på logisk 1 vil gi fra seg en logisk 1. Fordi denne porten er en IKKE-ELLER-port, vil dennes logiske 1 bli vendt til logisk 0. Porten kan tegnes slik:



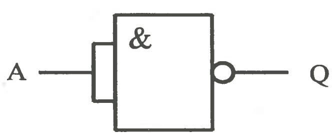
A	Q
0	1
1	0

Konklusjon
Q-verdien er alltid den omvendte verdi av A-verdien. Kretsen er derfor en inverter eller som noen sier, en IKKE-port.
Regneregelen er: $Q = \overline{A + A} = \overline{A}$

Eksempel nr.10
Når en OG-port blir invertert på utgangen, vil verdiene på Q naturligvis bli vendt om. Det har du sett tidligere. Her er en kopling av en IKKE-OG-port, hvor inngangene er lagt sammen. Begge inngangene mottar derfor samme logiske verdi.

$$Q = \overline{A \cdot A}$$

Det er kun en variabel. En OG-port som har begge innganger på logisk 1, vil gi fra seg en logisk 1. Fordi dette er en IKKE-OG-port, vil den logiske verdien 1 bli vendt til en logisk 0. Porten og funksjonstabellen er vist her:



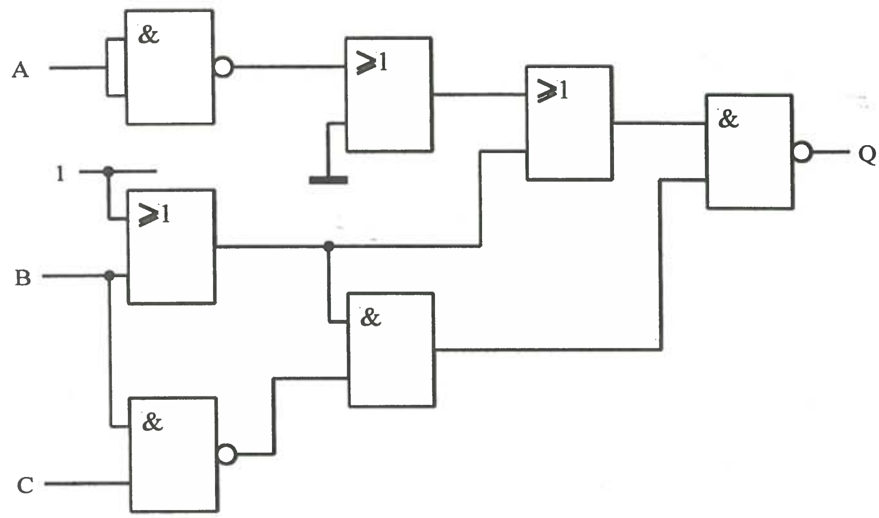
A	Q
0	1
1	0

Konklusjon
Q-verdien er alltid den omvendte av A-verdien. Kretsen er derfor en inverter eller som noen sier, en IKKE-port.
Regneregelen er: $Q = \overline{A \cdot A} = \overline{A}$

Oppgaver i Boolsk algebra

Oppgave 1

Figuren under viser en urealistisk logisk kopling. Ingen ville ha laget denne i virkeligheten. Dette kretsløpet er allikevel valgt fordi vi her skal vise hvordan en kan benytte Boolsk algebra til å forenkle. Start ved inngangen og fortsett gjennom de enkelte portene mot utgangen. Resultatet du kommer fram til vil være en av grunnportene. Fullfør også funktionstabellen for kretsløpet.



C	B	A	Q
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Oppgave 2
Du har gitt denne formelen: $Q = (A + B + C) \cdot AB$. Tegn et kretsløp ved hjelp av porter som er i samsvar med formelen. Fyll ut sannhetstabellen:

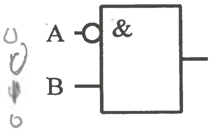
C	B	A	Q
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

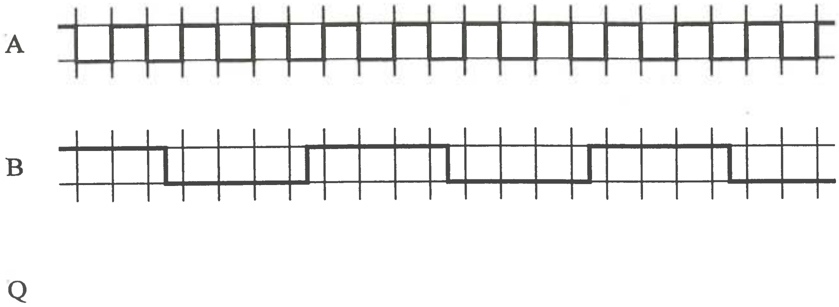
Når du vurderer sannhetstabellen, vil du se at formelen kan reduseres. Skriv den nye formelen.

Oppgave 3

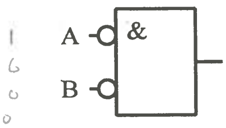
Her er fire forskjellige portkoplinger. De har de samme inngangssignalene. Tegn de fire utgangssignalene.

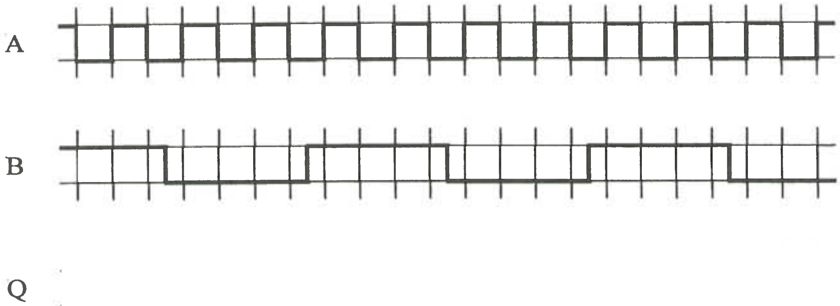
Oppgave 1.



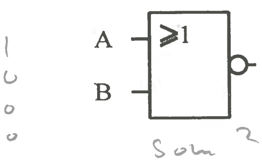


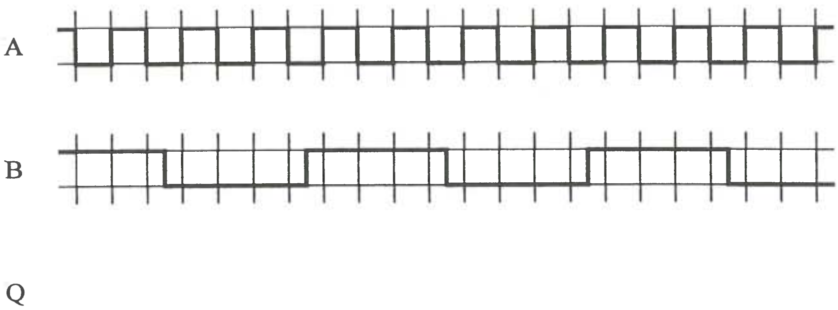
Oppgave 2.



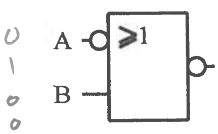


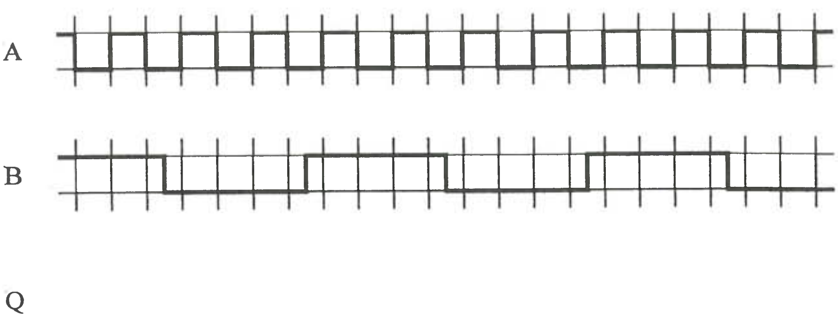
Oppgave 3.





Oppgave 4.



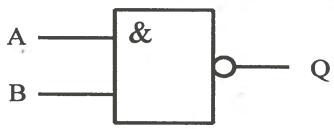


6 De Morgans teorem

Hensikt
Vi skal her vise hvordan vi ved hjelp av IKKE-OG-porter og IKKE-ELLER-porter er i stand til å lage alle andre typer porter. Vi kan starte med en vanlig IKKE-OG port.

Fra IKKE-OG-port til ELLER-port

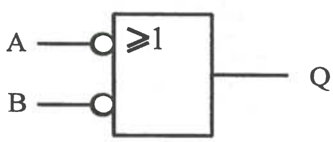
$$Q = \overline{A \cdot B}$$



B	A	Q
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Den logiske funksjonen $Q = \overline{A \cdot B}$ skal sammenliknes med denne: $Q = \overline{A} + \overline{B}$

Funksjonen er endret fra en **OG-funksjon** til en **ELLER-funksjon** samtidig med at inverteren på utgangen er erstattet med en inverter på hver inngang. Det er altså nå en **ELLER-port** hvor de variable inngangsverdiene er blitt vendt om.



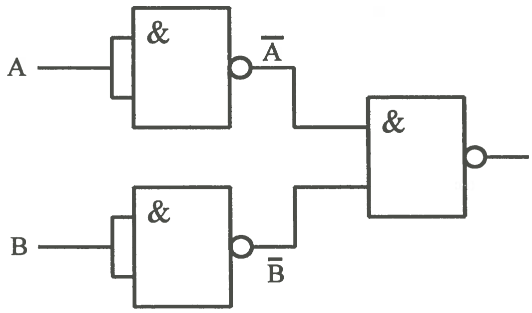
B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	Q
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Konklusjon
Når to ulike Boolske formler har samme sannhetsskjema, må de to forskjellige funksjonene være like. En OG-port som er invertert på utgangen, har samme logiske funksjon som en ELLER-port som har inngangene invertert. Du skal se at denne metoden kan brukes til å lage alle logiske funksjoner med kun en porttype, forutsatt at den er invertert.

$$Q = \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

De Morgan i praksis

Her er et eksempel på en ELLER-port som er laget med kun IKKE-OG-porter:



$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = A + B$$

Teorioppgave med de Morgans metode

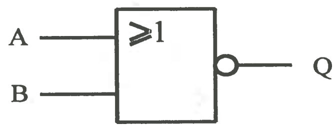
1. Tegn en IKKE-ELLER-port med bare NAND-porter.

2. Tegn sannhetstabellen som viser at det virkelig er en IKKE-ELLER-port.

3. Benytt de Morgans teorem for å bevise at det virkelig er en IKKE-ELLER-port.

Fra IKKE-ELLER-port til OG-port
I den forrige undersøkelsen var utgangspunktet en IKKE-OG-port. Her er en undersøkelse av De Morgans terem med utgangspunkt i en IKKE-ELLER-port.

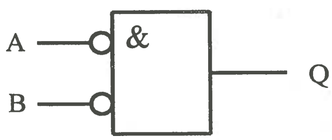
$$Q = \overline{A + B}$$



B	A	Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Den logiske funksjonen $Q = \overline{A + B}$ skal nå sammenliknes med $Q = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Funksjonen er endret fra ELLER-funksjon til OG-funksjon samtidig med at inverteren på utgangen er erstattet men to invertere på inngangen. De variable inngangsverdiene blir dermed vendt om.



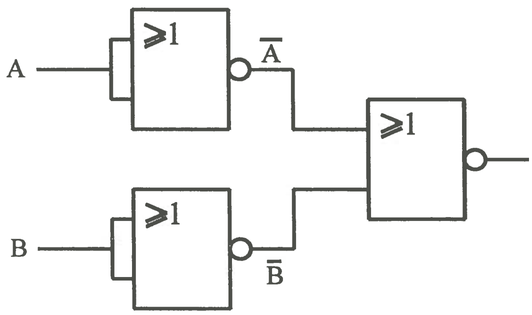
B	A
0	0
0	1
1	0
1	1

$\overline{B}$	$\overline{A}$	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konklusjon
Når to ulike Boolske formler har samme sannhetsskjema, må formlene være like.
En **ELLER-port** med invertert utgang har samme logiske funksjon som en OG-port med inngangene invertert.

$$Q = \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

De Morgan i praksis
Her er et eksempel på en OG-port som kun er laget av IKKE-ELLER-porter.



$$\overline{\overline{A}+\overline{B}} = \overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}} = A\cdot B$$

Teorioppgave med deMorgans metode

1. Tegn en IKKE-OG-port med bare NOR-porter.

2. Tegn sannhetstabellen som viser at det virkelig er en IKKE-OG-port.

3. Benytt de Morgans teorem for å bevise at det virkelig er en IKKE-OG-port.