

Eksamen våren 2010 – Løsninger

DEL 1

Uten hjelpemidler

Hjelpemidler: vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler

Oppgave 1

a $f(x) = x^2 \cdot \cos(3x)$

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(3x) + x^2 \cdot (-3 \sin(3x)) = 2x \cdot \cos(3x) - 3x^2 \cdot \sin(3x)$$

b 1 $\int 5x \cdot e^{2x} dx = 5x \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - \int 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} dx = \frac{5}{2} \cdot x \cdot e^{2x} - \frac{5}{4} \cdot e^{2x} + C$

2 $\int \frac{6x}{x^2-1} dx$ Vi setter $u = x^2 - 1$, og det gir $du = 2x dx$ eller $dx = \frac{du}{2x}$.

$$\int \frac{6x}{x^2-1} dx = \int \frac{6x}{u} \cdot \frac{du}{2x} = \int \frac{3}{u} du = 3 \ln|u| + C = 3 \ln|x^2 - 1| + C$$

c Vi multipliserer begge sider med den integrerende faktoren som blir e^{-2x} .

$$y' - 2y = 3$$

$$y' \cdot e^{-2x} - 2y \cdot e^{-2x} = 3 \cdot e^{-2x}$$

$$(y \cdot e^{-2x})' = 3 \cdot e^{-2x}$$

$$y \cdot e^{-2x} + C_1 = -\frac{3}{2} e^{-2x} + C_2$$

$$y \cdot e^{-2x} = -\frac{3}{2} e^{-2x} + C \text{ der } C = C_1 + C_2$$

$$y = -\frac{3}{2} + C \cdot e^{2x}$$

$$y(0) = 2$$

$$C \cdot e^{2 \cdot 0} - \frac{3}{2} = 2$$

$$C \cdot 1 = \frac{4}{2} + \frac{3}{2}$$

$$C = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{7}{2} e^{2x} - \frac{3}{2}$$

d 1 $\cos(u - v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$

Summen av venstresidene er lik summen av høyresidene. Det gir oss

$$\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cdot \cos v$$

$$\cos u \cdot \cos v = \frac{1}{2} (\cos(u + v) + \cos(u - v))$$

2 $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x = \frac{1}{2} (\cos(x - x) + \cos(x + x)) = \frac{1}{2} (\cos(0) + \cos(2x))$

$$= \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

e $f(x) = g'(x)$ og $h(x) = g''(x)$

$$\int_{-3}^2 f(x) \, dx = \int_{-3}^2 g'(x) \, dx = g(2) - g(-3) = 28 - 6 = 22$$

$$\int_{-3}^1 h(x) \, dx = \int_{-3}^1 g''(x) \, dx = g'(1) - g'(-3) = f(1) - f(-3) = -2 - 0 = -2$$

Oppgave 2

$$A = (3, 0, -2), \quad B = (0, 2, 0) \quad \text{og} \quad C = (1, -1, 4)$$

a $\overrightarrow{AB} = [0 - 3, 2 - 0, 0 - (-2)] = [-3, 2, 2]$

$$\overrightarrow{AC} = [1 - 3, -1 - 0, 4 - (-2)] = [-2, -1, 6]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [2 \cdot 6 - 2 \cdot (-1), 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 6, -3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2)] = [14, 14, 7]$$

b $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [14, 14, 7] = 7[2, 2, 1]$

$\vec{n} = [2, 2, 1]$ er en normalvektor for planet og $B = (0, 2, 0)$ er et punkt i planet

Vi bruker \vec{n} og B til å finne likningen for planet

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$2(x - 0) + 2(y - 2) + 1(z - 0) = 0$$

$$2x + 2y - 4 + z = 0$$

$$2x + 2y + z - 4 = 0$$

- c Siden l står vinkelrett på α , er normalvektoren til α også en retningsvektor for l .
 l har retningsvektoren $\vec{v} = [2, 2, 1]$ og går gjennom punktet $P = (5, 4, 4)$.
 Vektorlikningen som uttrykker posisjonsvektoren til alle mulige punkter på l , blir da
 $[x, y, z] = [5, 5, 4] + t[2, 2, 1]$

$$\text{Parameterframstillingen for } l \text{ kan da skrives } \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

Et punkt i xz -planet har 0 som andrekoordinat.

$$y = 0$$

$$4 + 2t = 0$$

$$t = -2$$

Skjæringspunktet mellom l og xz -planet blir da $(5 + 2 \cdot (-2), 0, 4 + (-2)) = (1, 0, 2)$.

- d Siden Q er et vilkårlig punkt på l , har Q koordinatene $Q = (5 + 2t, 4 + 2t, 4 + t)$.

$$\overrightarrow{AQ} = [(5 + 2t) - 3, (4 + 2t) - 0, (4 + t) - (-2)] = [2t + 2, 2t + 4, t + 6]$$

Pyramiden $ABCQ$ er et tetraeder, og volumet er gitt ved formelen

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AQ}| = \frac{1}{6} |7[2, 2, 1] \cdot [2t + 2, 2t + 4, t + 6]| = \frac{7}{6} |4t + 4 + 4t + 8 + t + 6| \\ &= \frac{7}{6} |9t + 18| = \frac{7 \cdot 9}{6} |t + 2| = \frac{7 \cdot 3}{2} |t + 2| = \frac{21}{2} |t + 2| \end{aligned}$$

e $V = 42$

$$\frac{21}{2} |t + 2| = 42$$

$$|t + 2| = 4$$

$$t + 2 = -4 \quad \vee \quad t + 2 = 4$$

$$t = -6 \quad \vee \quad t = 2$$

$$Q = (5 + 2 \cdot (-6), 4 + 2 \cdot (-6), 4 + (-6)) \quad \vee \quad Q = (5 + 2 \cdot 2, 4 + 2 \cdot 2, 4 + 2)$$

$$Q = (-7, -8, -2) \quad \vee \quad Q = (9, 8, 6)$$

(Grunnflaten ABC i pyramiden ligger i planet α . Det fins to toppunkter Q som gir pyramiden $ABCQ$ et volum lik 42. Disse to toppunktene ligger i samme avstand fra α , men på hver sin side av planet.)

DEL 2
Med hjelpemidler

Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 3

$$y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{26}{25}y = 0$$

a Vi løser den karakteristiske likningen

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{2}{5}r + \frac{26}{25} &= 0 \\ r &= \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{26}{25}}}{2 \cdot 1} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} - \frac{104}{25}}}{2} = \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{-\frac{100}{25}}}{2} \\ &= \frac{-\frac{2}{5} \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-\frac{2}{5} \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -\frac{1}{5} \pm i = -0,2 \pm i \end{aligned}$$

Ut fra løsningen av den karakteristiske likningen ser vi at den generelle løsningen til differensiallikningen er

$$y = e^{-0,2x} \cdot (C \sin x + D \cos x), \quad \text{der } C \text{ og } D \text{ er konstanter.}$$

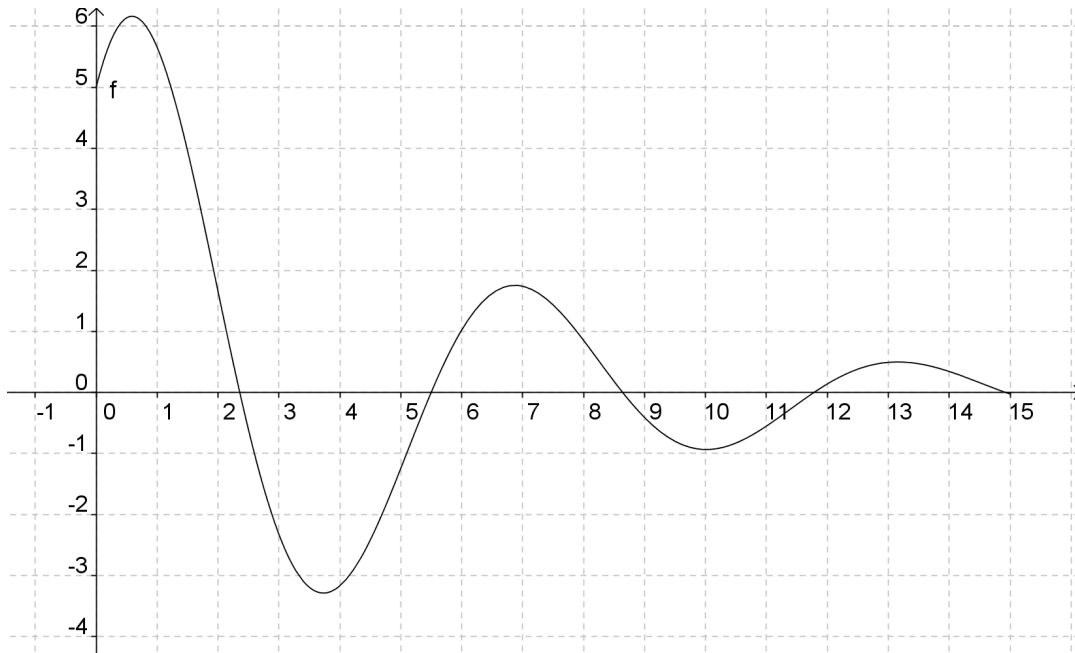
b

$$\begin{aligned} y(0) &= 5 & y\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= 0 \\ e^{-0,2 \cdot 0} \cdot (C \sin 0 + D \cos 0) &= 5 & e^{-0,2 \cdot \frac{3\pi}{4}} \cdot \left(C \sin \frac{3\pi}{4} + 5 \cos \frac{3\pi}{4}\right) &= 0 \\ e^0 \cdot (C \cdot 0 + D \cdot 1) &= 5 & C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} &= 0 \\ 1 \cdot (0 + D) &= 5 & C &= 5 \\ D &= 5 & & \end{aligned}$$

$$y = e^{-0,2x} \cdot (C \sin x + D \cos x) = e^{-0,2x} \cdot (5 \sin x + 5 \cos x) = 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x)$$

Oppgave 4

a $f(x) = 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x)$, $x \in \langle 0, 15 \rangle$



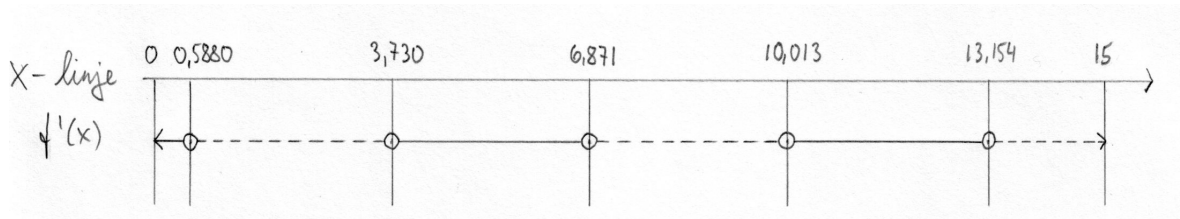
b Vi finner nullpunktene ved å løse likningen

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x) &= 0 \\
 \sin x + \cos x &= 0 \\
 \sin x &= -\cos x \\
 \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{-\cos x}{\cos x} \\
 \tan x &= -1 \\
 x &= -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\
 x &\in \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}, \frac{19\pi}{4} \right\}
 \end{aligned}$$

c $f'(x) = 5e^{-0,2x} \cdot (-0,2) \cdot (\sin x + \cos x) + 5e^{-0,2x} \cdot (\cos x - \sin x)$
 $= e^{-0,2x} \cdot (-\sin x - \cos x + 5 \cos x - 5 \sin x) = e^{-0,2x} \cdot (4 \cos x - 6 \sin x)$
 $= 2e^{-0,2x} \cdot (2 \cos x - 3 \sin x)$

d $f'(x) = 0$
 $3 \sin x = 2 \cos x$
 $\tan x = \frac{2}{3}$
 $x = 0,588 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

Fortegnet for den deriverte mellom nullpunktene til den deriverte ser vi av grafen i oppgave a.



Fortegnsskjemaet viser oss de tre x -verdiene til toppunktene. Vi setter dem inn i funksjonen og finner funksjonsverdiene til toppunktene.

$$f(0,5880) = 6,164 \quad f(6,871) = 1,754 \quad f(13,154) = 0,499$$

e
$$f(x) = 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x) = 5e^{-0,2x} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sin(x + \varphi) = 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x} \cdot \sin(x + \varphi)$$

der
$$\tan \varphi = \frac{1}{1} = 1$$

$$\varphi = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$f(x) = 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

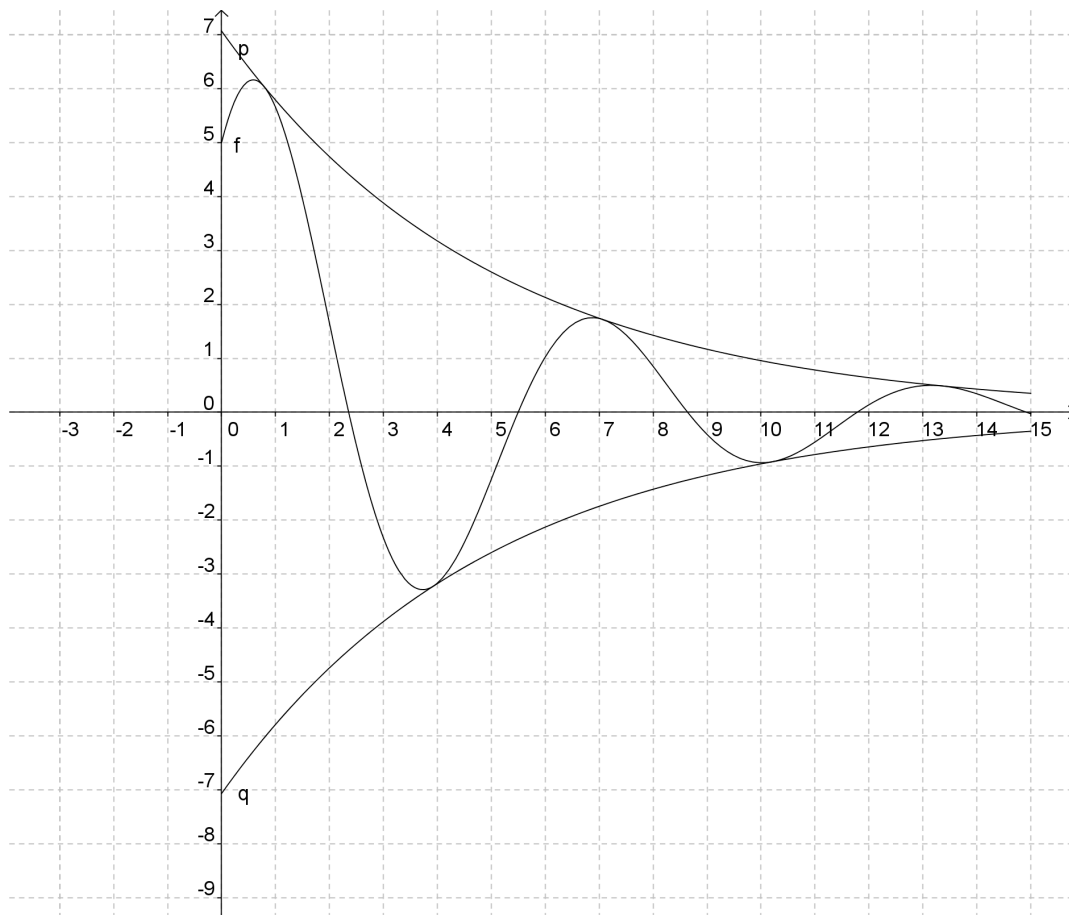
$$p(x) = 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x} \quad \text{og} \quad q(x) = -5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x}$$

f Sinusfaktoren i $f(x)$ svinger mellom -1 og 1 , og dermed vil verdiene til $f(x)$ svinge mellom $q(x)$ og $p(x)$.

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad | \cdot 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x}$$

$$-5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x} \leq 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2x}$$

$$q(x) \leq f(x) \leq p(x)$$



Oppgave 5

$$f(x) = 5e^{-0,2x} \cdot (\sin x + \cos x), \quad x \in \langle 0, \rightarrow \rangle$$

- a Fra oppgave 4b fant vi at det første nullpunktet er $x = \frac{3\pi}{4} \approx 2,356$, og at avstanden er π fra et nullpunkt til det neste. Det vil si at det n -te nullpunktet kan skrives på formen

$$x_n = 2,356 + (n-1) \cdot \pi, \quad \text{der } n \geq 1$$

- b** Nullpunktene danner en aritmetisk tallfølge der første ledd er 2,356 og differansen i tallfølgen er $d = \pi$.

$x \in \langle 0, 30 \rangle$ betyr at vi alltid må ha

$$x_n < 30$$

$$2,356 + (n-1) \cdot \pi < 30$$

$$n\pi - \pi < 30 - 2,356$$

$$n\pi < 27,644 + \pi$$

$$\frac{n\pi}{\pi} < \frac{27,644 + \pi}{\pi}$$

$$n < \frac{27,644}{\pi} + 1$$

$$n < 9,8$$

$$n \leq 9$$

Vi får 9 nullpunkter hvis $x \in \langle 0, 30 \rangle$.

- c** Vi regner ut forholdet mellom funksjonsverdien til et toppunkt og det foregående. Fra oppgave 4d vet vi at det første toppunktet har funksjonsverdien 6,164, og at avstanden fra et toppunkt til det neste er 2π . Dersom et toppunkt har x -koordinaten t , vil det foregående ha x -koordinaten $t - 2\pi$. Vi undersøker om forholdet er konstant:

$$\begin{aligned} \frac{f(t)}{f(t-2\pi)} &= \frac{5\sqrt{2}e^{-0,2t} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{5\sqrt{2}e^{-0,2(t-2\pi)} \cdot \sin\left((t-2\pi) + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{e^{-0,2t} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{e^{-0,2t+0,4\pi} \cdot \sin\left((t + \frac{\pi}{4}) - 2\pi\right)} \\ &= \frac{e^{-0,2t} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{e^{-0,2t} \cdot e^{0,4\pi} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{-0,4\pi} \approx 0,2846 \end{aligned}$$

Vi ser at forholdet mellom et ledd i tallfølgen og det foregående er konstant, og derfor er dette en geometrisk tallfølge med $a_1 = 6,164$ og $k = 0,2846$.

$$a_5 = a_1 \cdot k^{5-1} = 6,164 \cdot 0,2846^4 = 0,0404$$

- d** Det å summere y -koordinatene til toppunktene til høyre for origo betyr å summere leddene i følgen ovenfor, og vi får den tilsvarende geometriske rekka. Siden $-1 < k < 1$, vil rekka konvergere når $x \rightarrow \infty$. Rekkas sum blir

$$S = \frac{a_1}{1-k} = \frac{6,164}{1-0,2846} = 8,62$$

Oppgave 6

Alternativ I

a

$$-b \cdot v - k \cdot y = m \cdot a$$

$$-b \cdot y' - k \cdot y = m \cdot y''$$

$$my'' + by' + ky = 0$$

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

b

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = 0$$

$$y'' + \frac{1,0}{2,5}y' + \frac{2,6}{2,5}y = 0$$

$$y'' + \frac{1,0 \cdot 2}{2,5 \cdot 2}y' + \frac{2,6 \cdot 10}{2,5 \cdot 10}y = 0$$

$$y'' + \frac{2}{5}y' + \frac{26}{25}y = 0$$

$y(0) = 5$ og $y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0$. Dette er samme initialbetingelser som i oppgave 3b, og løsningen blir i henhold til oppgave 3 og 4:

$$y(t) = 5\sqrt{2} \cdot e^{-0,2t} \cdot \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- c** Passering av likevektsstillingen tilsvarer nullpunktene i oppgave 4b. Perioden er 2π , men likevektsstillingen passeres to ganger per periode (både på vei ut fra og inn mot veggen), og som vist i oppgave 4b er avstanden mellom nullpunktene π .
Loddet passerer likevektsstillingen med 3,14 sekunders mellomrom.
- d** Det maksimale utslaget på den ene siden av likevektslinja tilsvarer her y -koordinatene til topppunktene fra oppgave 4 og 5. Fra oppgave 5c vet vi at y -koordinatene til topppunktene danner en geometrisk tallfølge med $k = 0,285 \dots$. Det betyr at y -verdien til et toppunkt er 28,5 % av det foregående, eller med andre ord at den er redusert med 71,5 %.
På motsatt side av likevektslinja tilsvarer det maksimale utslaget absoluttverdien til y -verdiene til bunnpunktene. Vi kan vise på samme måte at disse også reduseres med 71,5 %. Disse utgjør en geometrisk tallfølge med samme kvotient, men med $a_1 = f(3,730)$ i stedet for $a_1 = f(0,5880)$ (se fortegnsskjemaet).

Alternativ II

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$$

a S_n er summen av de naturlige tallene som utgjør en aritmetisk rekke med $a_1 = 1$ og $d = 1$.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + n}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_8 = \frac{8(8+1)}{2} = 4 \cdot 9 = 36$$

b $S_n = \sum_{k=1}^n k^3 = 1 + 8 + 27 + \dots + n^3$

Vi prøver oss fram med et digitalt verktøy og finner $S_{15} = 14\,400$ og $S_{16} = 18\,496$.

Rekka må ha minst 16 ledd for at summen skal være større enn 15 000.

c $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$n = t \text{ gir } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + t^3 = \frac{t^2(t+1)^2}{4}$$

$$n = t+1 \text{ gir } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (t+1)^3 = \frac{(t+1)^2((t+1)+1)^2}{4}$$

Vi skal nå anta at formelen stemmer for $n = t$ og ser hva denne antakelsen betyr for $n = t+1$.

$$\begin{aligned} \text{VS} &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + t^3 + (t+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + t^3) + (t+1)^3 \\ &= \frac{t^2(t+1)^2}{4} + (t+1)^3 = \frac{t^2(t+1)^2}{4} + \frac{4(t+1)(t+1)^2}{4} \\ &= \frac{(t+1)^2(t^2 + 4(t+1))}{4} = \frac{(t+1)^2(t^2 + 4t + 4)}{4} = \frac{(t+1)^2(t+2)^2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{HS} = \frac{(t+1)^2((t+1)+1)^2}{4} = \frac{(t+1)^2(t+2)^2}{4}$$

VS = HS, og vi har vist at formelen stemmer for $n = t+1$ dersom vi antar at den stemmer for $n = t$. Vi mangler nå å sjekke om formelen stemmer for $n = 1$.

$$\text{VS} = 1^3 = 1 \qquad \text{HS} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

VS = HS, og vi har vist at formelen stemmer for $n = 1$.

Vi har nå vist at formelen stemmer for $n = 1$, og at antakelsen om at den stemmer for $n = t$ leder til at den stemmer for $n = t+1$. Dermed har vi vist at formelen stemmer for alle $n \geq 1$.

d Her må vi kombinere formelen fra oppgave c med formelen fra oppgave a:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (S_n)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$