Utdanningsdirektoratet

Eksamen

28.11.2011

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 2 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Vedlegg:	Vedlegg 1 skal leverast inn saman med svaret ditt.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgåvene i Del 1 og Del 2. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil også ein alternativ metode kunne gi noko utteljing.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – vurderer om svar er rimelege – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonane

1) $f(t) = 0{,}02t^3 + 0{,}6t^2 + 4{,}1$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3) $h(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

b) Vi har gitt polynomfunksjonen

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$$

1) Vis at $x = 2$ er eit nullpunkt.

2) Skriv $P(x)$ som eit produkt av førstegradsfaktorar.

3) Løys ulikskapen $P(x) \leq 0$

c) Lag ein formel for x når

$$y = a - b^x$$

Forklar kvifor $y < a$

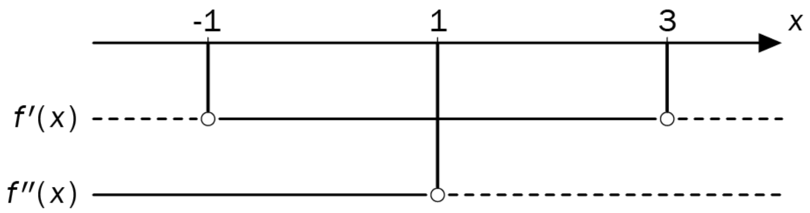
d) Vi har gitt punkta $A(1, 0)$, $B(3, 4)$ og $C(2, t)$

1) Bestem vektorane $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

2) Bestem t slik at $\angle A = 90^\circ$

3) Ein sirkel har AB som diameter. Bestem likninga til sirkelen.

e) Forteiknslinjene til $f'(x)$ og $f''(x)$ til en funksjon f er gitt nedanfor.



1) Bestem kvar grafen til f stig og søkk.

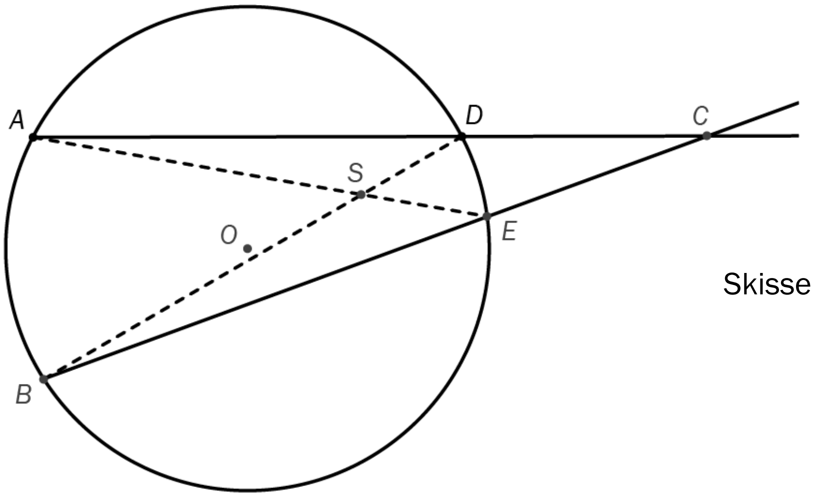
2) Bestem x-verdiane til eventuelle botn-, topp- og vendepunkt på grafen til f.

3) Teikne ei skisse av korleis grafen til f *kan* sjå ut.

f) Funksjonen f er gitt som $f(x) = x^2 + 1$

Bruk at $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ til å vise at $f'(x) = 2x$

g) Ein sirkel har sentrum i O. AB skjer av ein boge på 60°, medan DE skjer av ein boge på 20°. Sjå skissa nedanfor.



1) Bestem $\angle ADB$

2) Bestem $\angle DBE$

3) Vis at $\angle ACB = 20^\circ$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 2 (12 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x\,, \quad x \in \langle -1, 3 \rangle$$

a) Bestem nullpunkta til f ved rekning. Forklar korleis vi av utrekninga kan sjå at grafen til f tangerer x-aksen i eitt av nullpunkta.

b) Teikne forteiknslinja til f', og bruk henne til å bestemme eventuelle topp- og botnpunkt på grafen til f.

c) Teikne forteiknslinja til f'', og bruk henne til å bestemme eventuelle vendepunkt på grafen til f.

d) Vis ved rekning at likninga til tangenten i punktet $P\big(1, f(1)\big)$ er gitt ved

$$y = -x + 2$$

e) Teikne grafen til f og tangenten i same koordinatsystem.

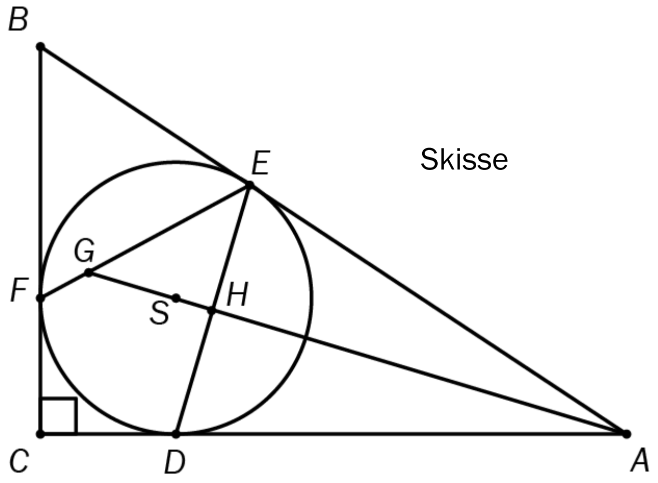
f) Grafen til f skjer tangenten i eit anna punkt Q.

Forklar at x-verdien til Q kan bestemmast av likninga

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

Bestem koordinatane til Q.

Oppgåve 3 (6 poeng)



Ein sirkel med sentrum i S er skriven inn i ein rettvinkla ΔABC. Sidene i trekanten tangerer sirkelen i D, E og F. Linja AS skjer EF i G og ED i H.

Ei setning i geometrien seier at da er $AD = AE$.

a)

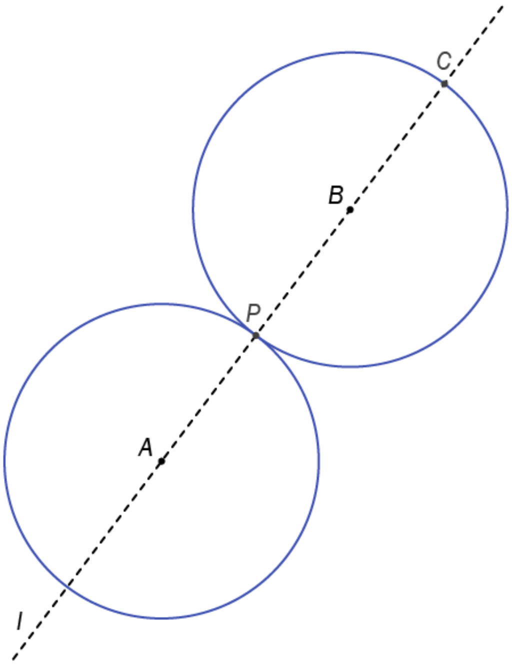
1) Forklar at $\angle GHE = 90°$

2) Bestem $\angle HEG$ og $\angle HGE$

b) I vedlegget er det teikna ein sirkel med to vilkårlege kordar.
Lag ein konstruksjon på vedlegget med passar og linjal slik at du finn plasseringa til sentrum S i sirkelen.

Oppgåve 4 (9 poeng)

Skisse



To sirklar med same radius har sentrum i høvesvis A og B. Sirklane tangerer kvarandre i punktet P.

Sirkelen med sentrum i A har likninga

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$$

Sirkelen med sentrum i B har likninga

$$x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$$

a) Vis ved rekning at sentrum i sirklane har koordinatane $A(-3, -2)$ og $B(3, 6)$.

b) Forklar at punkta A, P og B alle ligg på ei rett linje l.

Vis at punktet P har koordinatane $P(0, 2)$.

c) Finn ei parameterframstilling til l.

d) Linja l skjer sirkelen med sentrum i B også i punktet C.

Bestem koordinatane til punktet C.

Oppgåve 5 (5 poeng)

På ein skole går det 120 jenter og 80 gutar. Halvparten av jentene går med bukser, medan den andre halvparten går med skjørt. Alle gutane går med bukser.

Hendingane J og B er definert ved:

J: Eleven er ei jente.

B: Eleven går med bukse.

a) Bestem sannsynet for at ein tilfeldig vald elev går med bukse.

b) Bestem $P(B|J)$. Avgjer om hendingane J og B er uavhengige.

c) Bruk Bayes' setning, og bestem $P(J|B)$.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Vi vil sjå på summen av alle faktorar som går opp i 12. Vi tek med 1, men ikkje talet 12 sjølv.

Faktorane til 12 blir da

$$1, 2, 3, 4 \text{ og } 6.$$

Summen av faktorane blir

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

For talet 6 får vi på same måte

$$1 + 2 + 3 = 6$$

> Når summen av faktorane er lik talet sjølv, seier vi at talet er perfekt.

Dermed er 6 eit perfekt tall, medan 12 ikkje er det.

a) Vis at 28 er eit perfekt tal.

b) Summen av faktorane i 220 er

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

Finn summen av faktorane i 284.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 2 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Vedlegg:	Vedlegg 1 skal leveres inn sammen med besvarelsen din.
Framgangsmåte:	Du skal svare på alle oppgavene i Del 1 og Del 2. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (24 poeng)

a) Deriver funksjonene

1) $f(t) = 0{,}02t^3 + 0{,}6t^2 + 4{,}1$

2) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

3) $h(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

b) Vi har gitt polynomfunksjonen

$$P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$$

1) Vis at $x = 2$ er et nullpunkt.

2) Skriv $P(x)$ som et produkt av førstegradsfaktorer.

3) Løs ulikheten $P(x) \leq 0$

c) Lag en formel for x når

$$y = a - b^x$$

Forklar hvorfor $y < a$

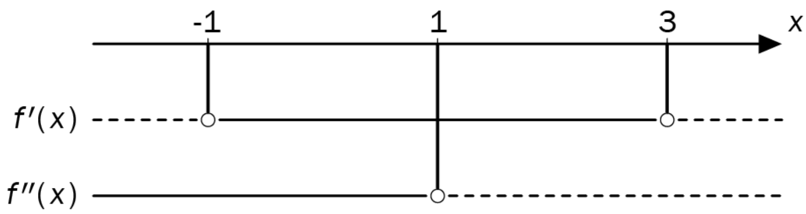
d) Vi har gitt punktene $A(1, 0)$, $B(3, 4)$ og $C(2, t)$

1) Bestem vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

2) Bestem t slik at $\angle A = 90^\circ$

3) En sirkel har AB som diameter. Bestem likningen til sirkelen.

e) Fortegnslinjene til $f'(x)$ og $f''(x)$ til en funksjon f er gitt nedenfor.



1) Bestem hvor grafen til f stiger og synker.

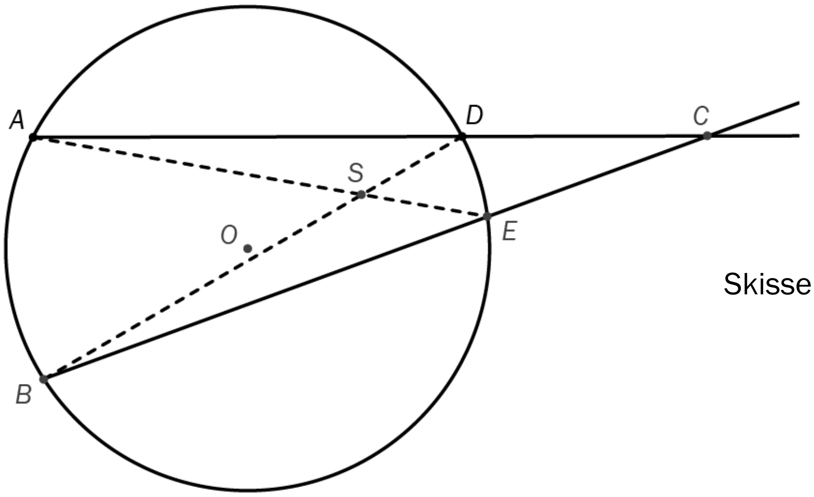
2) Bestem x-verdiene til eventuelle bunn-, topp- og vendepunkter på grafen til f.

3) Tegn en skisse av hvordan grafen til f *kan* se ut.

f) Funksjonen f er gitt som $f(x) = x^2 + 1$

Bruk at $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ til å vise at $f'(x) = 2x$

g) En sirkel har sentrum i O. AB skjærer av en bue på 60°, mens DE skjærer av en bue på 20°. Se skissen nedenfor.



Skisse

1) Bestem $\angle ADB$

2) Bestem $\angle DBE$

3) Vis at $\angle ACB = 20^\circ$

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 2 (12 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x, \quad x \in \langle -1, 3 \rangle$$

a) Bestem nullpunktene til f ved regning. Forklar hvordan vi av utregningen kan se at grafen til f tangerer x-aksen i ett av nullpunktene.

b) Tegn fortegnslinjen til f', og bruk denne til å bestemme eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Tegn fortegnslinjen til f'', og bruk denne til å bestemme eventuelle vendepunkter på grafen til f.

d) Vis ved regning at likningen til tangenten i punktet $P\big(1, f(1)\big)$ er gitt ved

$$y = -x + 2$$

e) Tegn grafen til f og tangenten i samme koordinatsystem.

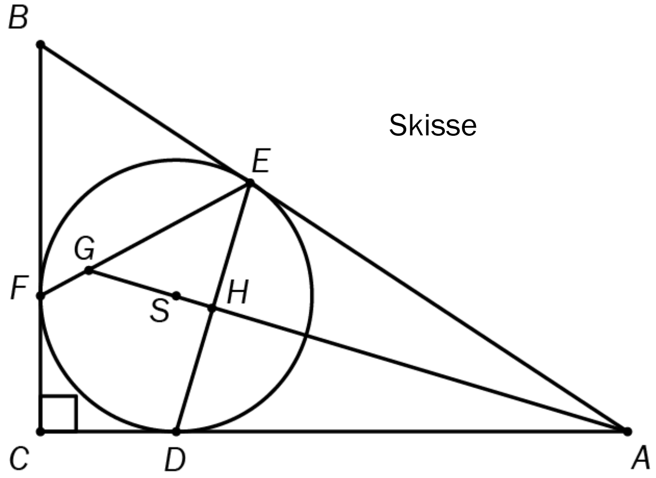
f) Grafen til f skjærer tangenten i et annet punkt Q.

Forklar at x-verdien til Q kan bestemmes av likningen

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$$

Bestem koordinatene til Q.

Oppgave 3 (6 poeng)



En sirkel med sentrum i S er innskrevet i en rettvinklet ΔABC. Sidene i trekanten tangerer sirkelen i D, E og F. Linjen AS skjærer EF i G og ED i H.

En setning i geometrien sier at da er $AD = AE$.

a)

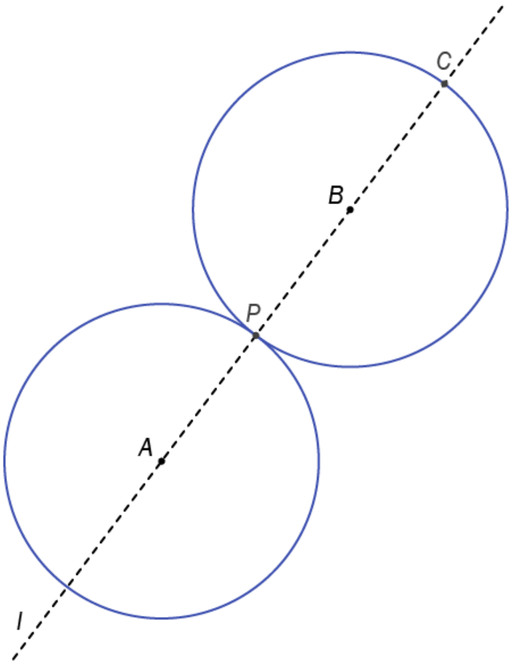
1) Forklar at $\angle GHE = 90°$

2) Bestem $\angle HEG$ og $\angle HGE$

b) I vedlegget er det tegnet en sirkel med to vilkårlige korder.
Lag en konstruksjon på vedlegget med passer og linjal slik at du finner plasseringen til sentrum S i sirkelen.

Oppgave 4 (9 poeng)

Skisse



To sirkler med samme radius har sentrum i henholdsvis A og B. Sirklene tangerer hverandre i punktet P.

Sirkelen med sentrum i A har likningen

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$$

Sirkelen med sentrum i B har likningen

$$x^2 + y^2 - 6x - 12y + 20 = 0$$

a) Vis ved regning at sentrum i sirklene har koordinatene $A(-3, -2)$ og $B(3, 6)$.

b) Forklar at punktene A, P og B alle ligger på en rett linje l.

Vis at punktet P har koordinatene $P(0, 2)$.

c) Finn en parameterframstilling til l.

d) Linjen l skjærer sirkelen med sentrum i B også i punktet C.

Bestem koordinatene til punktet C.

Oppgave 5 (5 poeng)

På en skole går det 120 jenter og 80 gutter. Halvparten av jentene går med bukser, mens den andre halvparten går med skjørt. Alle guttene går med bukser.

Hendelsene J og B er definert ved:

J: Eleven er en jente.

B: Eleven går med bukse.

a) Bestem sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev går med bukse.

b) Bestem $P(B|J)$. Avgjør om hendelsene J og B er uavhengige.

c) Bruk Bayes' setning, og bestem $P(J|B)$.

Oppgave 6 (4 poeng)

Vi vil se på summen av alle faktorer som går opp i 12. Vi tar med 1, men ikke tallet 12 selv.

Faktorene til 12 blir da

$$1, 2, 3, 4 \text{ og } 6.$$

Summen av faktorene blir

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

For tallet 6 får vi på samme måte

$$1 + 2 + 3 = 6$$

> Når summen av faktorene er lik tallet selv, sier vi at tallet er perfekt.

Dermed er 6 et perfekt tall, mens 12 ikke er det.

a) Vis at 28 er et perfekt tall.

b) Summen av faktorene i 220 er

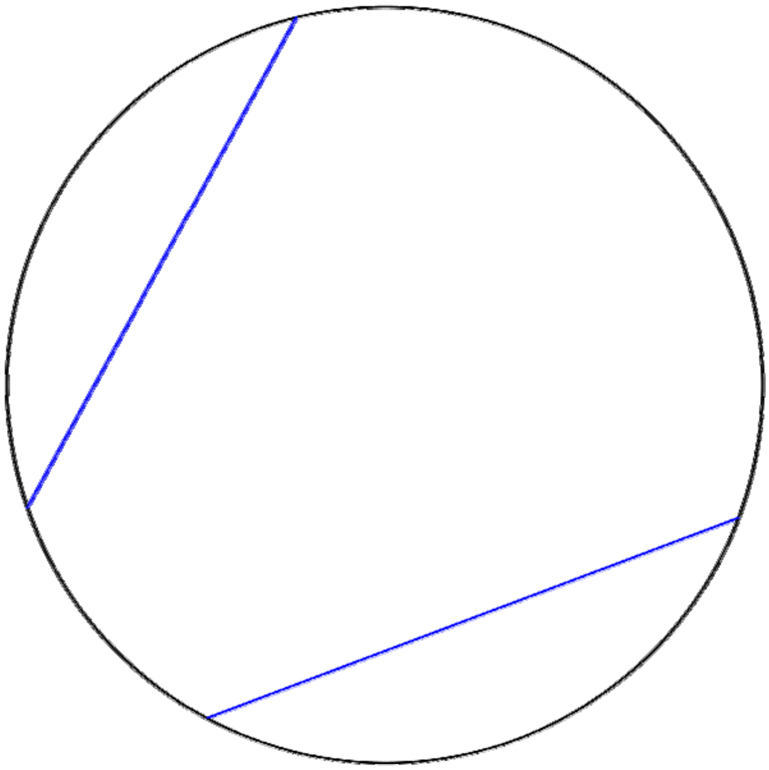
$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

Finn summen av faktorene i 284.

Blank side.

Vedlegg 1 til Oppgåve 3 b) / Oppgave 3 b)
Eksamen, REA3022 Matematikk R1, 28.11.2011

Skole:	Kandidatnr.:



Hugs å levere inn dette vedlegget saman med svaret ditt.
Husk å levere inn dette vedlegget sammen med besvarelsen din.

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet