Innlevering i Mattematikk

R1

Øistein Søvik

9/4/2009

Oppgave 1. Du har gitt tallene 2,5 og 7.

a) *Hvor mange hele, positive tall kan du lage av disse tallene når ingen av sifrene kan gjentas?*

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \quad = \; 6$$

$$\left\{\begin{matrix} 7 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \\ 5 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{matrix}\right\} \; = \; 6$$

$$\underline{\underline{\text{Man kan lage 6 hele, positive tall av 7 , 5 , 2 når ingen av sifrene kan gjentas}}}$$

b) *Hva er sannsynligheten for at et av tallene du har laget ikke inneholder tallet 2?*

$$\left\{\begin{matrix} 7\;7\;7 & 5\;7\;7 & 2\;7\;7 \\ 7\;7\;5 & 5\;7\;5 & 2\;7\;5 \\ 7\;7\;2 & 5\;7\;2 & 2\;7\;2 \\ 7\;5\;7 & 5\;5\;7 & 2\;5\;7 \\ 7\;5\;5 & 5\;5\;5 & 2\;5\;5 \\ 7\;5\;2 & 5\;5\;2 & 2\;5\;2 \\ 7\;2\;7 & 5\;2\;7 & 2\;2\;7 \\ 7\;2\;5 & 5\;2\;5 & 2\;2\;5 \\ 7\;2\;2 & 5\;2\;2 & 2\;2\;2 \end{matrix}\right\} \; = \; \frac{8}{27}$$

$$2 \;\cdot\; 2 \;\cdot\; 2 \;=\; 8$$

8 tall inneholder ikke 2

$$\frac{8}{3^3} \;=\; \frac{8}{3 \cdot 3 \cdot 3} \;=\; \frac{8}{27} \;=\; \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx \; 0.2963 \;=\; 29.63\%$$

$$\underline{\underline{\text{Sannsynligheten for at et av tallene ikke inneholder tallet 2 er } \frac{8}{27}}}$$

Oppgave 2. To uavhengige hendelser A og B har følgende sannsynligheter for å inntreffe:

$$P(A) = \frac{1}{5} \qquad P(B) = \frac{1}{6}$$

a) *Hva er sannsynligheten for at begge hendelsene inntreffer?*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1 \cdot 1}{6 \cdot 5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{30} \approx 0.0333... = 3.33\%$$

Sannsynligheten for at begge hendelsene inntreffer er $\underline{\underline{\frac{1}{30}}}$

b) *Hva er sannsynligheten for at A inntreffer og B ikke inntreffer?*

$$= P(A) \cdot P(\overline{B})$$

$$= P(A) \cdot (1 - P(B))$$

$$= \frac{1}{5} \cdot (1 - \frac{1}{6})$$

$$= \frac{1}{5} \cdot (\frac{6}{6} - \frac{1}{6})$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \approx 0.1667 = 16.67\%$$

Sannsynligheten for at A inntreffer og B ikke inntreffer er $\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

c) *Hva er sannsynligheten for at ingen av hendelsene inntreffer?*

$$= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

$$= (1 - P(A)) \cdot (1 - P(B))$$

$$= (1 - \frac{1}{5}) \cdot (1 - \frac{1}{6})$$

$$= (\frac{5}{5} - \frac{1}{5}) \cdot (\frac{6}{6} - \frac{1}{6})$$

$$= (\frac{4}{5}) \cdot (\frac{5}{6})$$

$$= (\frac{2}{1}) \cdot (\frac{1}{3})$$

$$= \frac{2}{3} \approx 0.6667 = 66.67\%$$

Sannsynligheten for at ingen av hendelsene inntreffer er $\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

Oppgave 3. Sannsynligheten for at en hendelse A skal inntreffe er 0,2. Hendelsen B er uavhengig av A. Sannsynligheten for at A eller B eller begge skal inntreffe er 0,6. Hva er sannsynligheten for at B skal inntreffe?

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.2 \\ P(A \cup B) &= 0.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) - P(A \cap B) &= P(A \cup B) \\ P(B) &= P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) \\ P(B) &= 0.6 - 0.2 + 0 \\ P(B) &= 0.4 = 40\% = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Sannsynligheten for at B skal inntreffe er 0.4

Oppgave 4. En fabrikk produserer søtsaker og pakker disse i poser. I hver pose ligger en liten lekebil. Lekebilene er 4 forskjellige typer. Dersom du kjøper 4 pakker av produktet, hva er sannsynligheten for at

a) *alle bilene er av samme type*

Bil A , *Bil B* , *Bil C* og *Bil D*

Antall mulige bilkombinasjoner er:

$$4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$$

Vi kan enten ha fire av bil A eller fire av bil B ... osv.

Dette gir 4 forskjellige måter der alle bilene er like.

$$\frac{4}{256} = \frac{2}{128} = \frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1.5625\%$$

Sannsynligheten for at alle bilene er av samme type er $\frac{1}{64}$

b) *Du får et fullstendig sett av 4 forskjellige biler?*

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

For første pose har vi fire valg, A, B, C eller D

på neste har vi kunn 3 valg, siden vi allerede har valgt en bil

og denne kan vi selvfølgelig ikke velge igjen siden alle bilene skal være forsjellige

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{3}{32} = 0.09375 = 9.375\%$$

Sannsynligheten for du *få*r et fullstendig sett av 4 forskjellige biler er $\frac{3}{32}$

Oppgave 5. Vi kaster en mynt 4 ganger. Hva er sannsynligheten for at det fjerde kastet gir MYNT for andre gang?

$$\left.\begin{array}{llll|llll}
Mynt & |\ Mynt & |\ Mynt & |\ Mynt & Mynt & |\ Kron & |\ Mynt & |\ Mynt \\
Mynt & |\ Mynt & |\ Mynt & |\ Kron & Mynt & |\ Kron & |\ Mynt & |\ Kron \\
Mynt & |\ Mynt & |\ Kron & |\ Mynt & Mynt & |\ Kron & |\ Kron & |\ Mynt \\
Mynt & |\ Mynt & |\ Kron & |\ Kron & Mynt & |\ Kron & |\ Kron & |\ Kron \\
 & & & & & & & \\
Kron & |\ Kron & |\ Mynt & |\ Mynt & Kron & |\ Mynt & |\ Mynt & |\ Mynt \\
Kron & |\ Kron & |\ Mynt & |\ Kron & Kron & |\ Mynt & |\ Mynt & |\ Kron \\
Kron & |\ Kron & |\ Kron & |\ Mynt & Kron & |\ Mynt & |\ Kron & |\ Mynt \\
Kron & |\ Kron & |\ Kron & |\ Kron & Kron & |\ Mynt & |\ Kron & |\ Kron
\end{array}\right\} \frac{3}{16}$$

Om man kaster en mynt 4 ganger gir det

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

mulige utfall. Det er 50/50 sjangse for at det er mynt eller krone på en gitt plassering. Dermed vet vi at halvparten av utfallene vil ha mynt på sisteplass.

$$\frac{16}{2} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$$

Dermed er det 8 av 16 rekker som har mynt som siste utfall.
For de andre myntene, kan vi enten ha mynt på førsteplass, andreplass eller tredjeplass. Det gir oss.

$$\frac{3}{2^4} = \frac{3}{16} = 0.1875 = 1.875\%$$

Sannsynligheten for at det fjerde kastet gir MYNT for andre gang er $\frac{3}{16}$

Oppgave 6. I et lotteri kommer hvert tolvte lodd ut med gevinst. Du kjøper 4 lodd.

a) *Hva er sannsynligheten for at ingen av loddene gir gevinst?*

$$P(G) = \frac{1}{12}$$

$$P(\overline{G}) = 1 - P(G)$$

$$P(\overline{G}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{12}{12} - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

$$4P(\overline{G}) = \left(\frac{11}{12}\right)^4 = \frac{14641}{20736} \approx 0.70607 = 70.607\%$$

Sannsynligheten for at ingen av loddene gir gevinst er ca 70%

b) *Hva er sannsynligheten for at minst ett av loddene kommer ut med gevinst?*

$$\sum_{x=1}^{4} \binom{4}{x} \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{1}{12}\right)^{4-x} = \frac{6095}{20736}$$

$$P(G \geq 1) = 1 - P(\overline{G})^4$$

$$P(G \geq 1) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^4$$

$$P(G \geq 1) = \frac{20736}{20736} - \frac{14641}{20736}$$

$$P(G \geq 1) = \frac{6095}{20736} = 0.29393 = 29.393\%$$

Sannsynligheten for at minst ett av loddene kommer ut med gevinst er 29.393%

Oppgave 7. Et registreringsnummer for en bil inneholder to bokstaver etterfulgt av fem tall. Du kan velge mellom 26 bokstaver. Det første tallet kan ikke være 0. Regn ut antall mulige registreringsnumre.

$= 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10^4$

$= 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

$= 60\,840\,000$

Antall mulige registreringsnumre er 60 840 000

Oppgave 8. Hvor mange mulige rangeringer kan vi lage av bokstavene i ordet ABRAKADABRA?

$$\begin{aligned} \textit{Abrakadabra} &= 11 \textit{ bokstaver} \\ a &= 5 \textit{ ganger} \\ b &= 2 \textit{ ganger} \\ r &= 2 \textit{ ganger} \end{aligned}$$

$= \dfrac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!}$ oppe er antall ord, men vi må dele på

$= \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$ antallet like bokstaver nede siden det

$= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6$ spiller ingen rolle hvilken a som står hvor.

$= 83\,160$

Vi kan lage 83 160 rangeringer av bokstavene i ordet ABRAKADABRA

Oppgave 9 (repetisjon).
Det skal lages en beholder med form som et rettvinklet prisme der grunnflaten (og toppflaten) er et kvadrat. Volumet skal være 1,0 m³. De fire sideflatene skal lages av et materiale som koster 67,50 kr per m², mens grunnflaten og toppflaten skal lages av et materiale som koster 20 kr per m². Vi ønsker å lage beholderen så billig som mulig. Vi setter x meter for grunnflatesiden og h meter for høyden.
Vi ser bort fra tykkelsen av materialet.

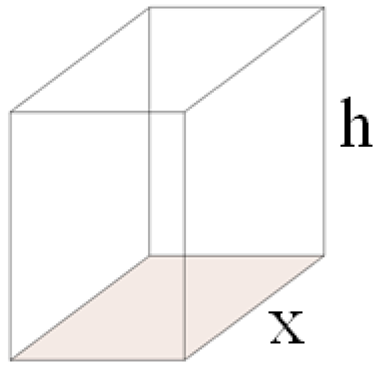
a) *Vis at* $h = \frac{1}{x^2}$

Volumet til en boks er gitt ved formelen

$V = G \cdot h$

Vi vet allerede V og G og kan dermed løse med tanke på h

$$V = G \cdot h$$
$$V = l \cdot b \cdot h$$
$$1 = x \cdot x \cdot h$$
$$1 = x^2 h$$
$$\underline{\underline{h = \frac{1}{x^2}}}$$



b) *Vis at materialkostnaden er* $f(x)$ *kroner, der* $f(x) = 40x^2 + \frac{270}{x}$.

Kostnaden på boksen er lik overflaten til prismet ganget med prisen
Omkretsen av et prisme, er gitt ved formelen.

$O = 2G + 4hx$

Dermed blir formelen for pris lik

$f(x) = 2G \cdot g + 4hx \cdot s$

Der g er prisen for grunnflaten og s er prisen for en sidekant

Vi vet at $h = \frac{1}{x^2}$ Og at G $= x \cdot x$ og setter dette inn i formelen

$$f(x) = 2Gg + 4hxs$$
$$f(x) = 2 \cdot x \cdot x \cdot g + 4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot s \cdot x$$
$$f(x) = 2x^2 g + \frac{4s}{x}$$

Vi setter inn kostnadene for g og s

$$f(x) = 2x^2 \cdot 20 + \frac{4 \cdot 67.5}{x}$$
$$\underline{\underline{f(x) = 40x^2 + \frac{270}{x}}}$$

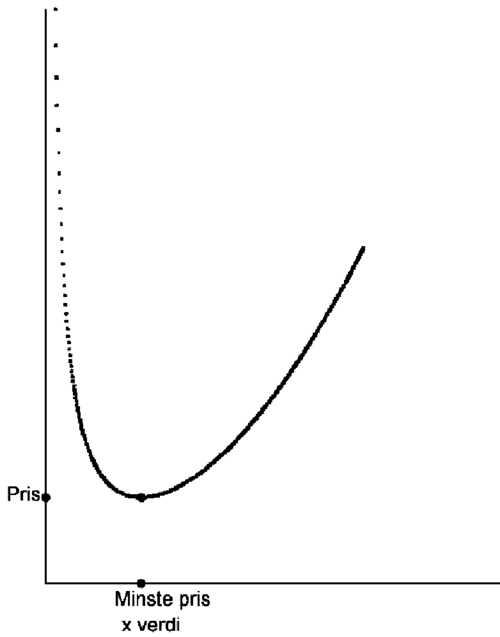
Utrag fra Geogebra-fil til denne oppgaven

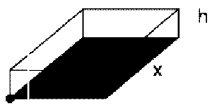
x 1.5

Pris for grunnflaten per meter 20

Pris for en meter av en sideflate 67.5

Volum av boksen 1





Volum = 1 cm^3

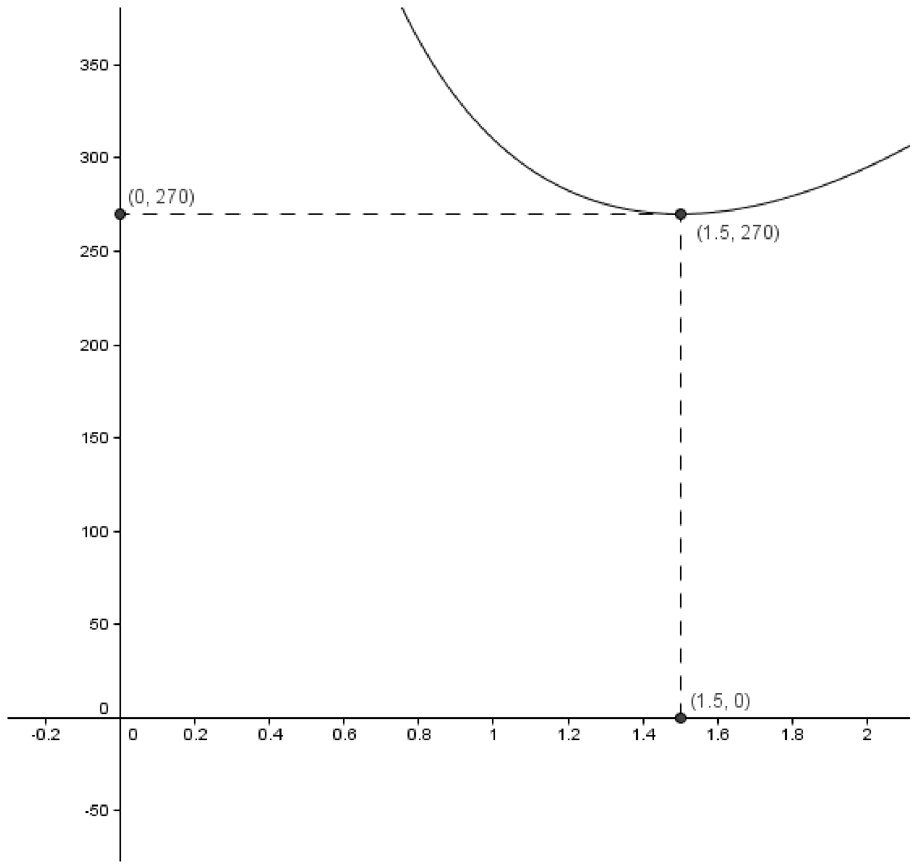
Omkrets = 13.78 cm

Høyde av boksen	= 0.44 cm
Grunnflaten av boksen	= 2.25cm^2
En sidekant	= 45 kr
Fire sidekanter	= 180 kr
Grunnflaten	= 45 kr
Bunnen og toppen	= 90 kr
Totalt	= 270 kr

Minst kostnader når x = 1.5

Da koster boksen 270 kr å lage

Bare å spørre om du vil se på selve filen; den gir en enkel graf og man kan forandre x verdi, pris og volum. I tillegg er det en liten firkant som forandrer seg i samsvar med x verdien.



c) *Tegn grafen til f på lommeregneren, og bruk det til å finne den verdien av x som gjør materialkostnaden minst mulig. Finn også materialkostnaden i dette tilfellet.*

$$f(x) = 40x^2 + \frac{270}{x}$$

$$f(x) = 40x^2 + 270x^{-1}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 40(x^{2-1}) + (-1 \cdot 270)\left(x^{-1-1}\right)$$

$$f'(x) = 80x - \frac{270}{x^2}$$ Finner den deriverte av funksjonen

$$0 = 80x - \frac{270}{x^2}$$ Setter $f'(x)$ lik 0 for å finne ut når stigningstallet er 0.

$$80x = \frac{270}{x^2}$$ Dette er for å finne terasse- og ekstremalpunktene til $f(x)$

$$80x \cdot x^2 = \frac{270}{x^2} \cdot x^2$$

$$\frac{80x^3}{80} = \frac{270}{80}$$

$$x^3 = \frac{27}{8}$$

$$(x)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\underline{x = \frac{3}{2}}$$

$$f(x) = 40x^2 + \frac{270}{x}$$ setter x inn i den opprinnelige ligningen

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 40\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 270 : \frac{3}{2}$$ for å finne ut hva y verdien til punktet er

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 40\frac{9}{4} + 270 \cdot \frac{2}{3}$$ y verdien er altså prisen når boksen har grunnflate x

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 10\frac{9}{1} + 90 \cdot \frac{2}{1}$$ siden tegnet foran x^2 er negativt er x et bunnpunkt

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 90 + 180$$

$$\underline{f\left(\frac{3}{2}\right) = 270}$$

Prismet er billigst når grunnflaten er lik $\frac{3}{2}$, da koster beholderen 270kr å lage