

# Innlevering i matematikk

---

## Kapittel 3 – Vektorer

Øistein Sjøvik

10/20/2009

## Oppgave 1

Tegn en trekant ABC. Et punkt P ligger på BC slik at BP:PC=1:4. Et punkt Q ligger på AC slik at AQ:QC=3:1.

Sett

$$\vec{AB} = \vec{a}$$
$$\vec{AC} = \vec{b}$$

- a) Merk av P og Q på tegningen og bestem  $\vec{AP}$  og  $\vec{BQ}$  uttrykt ved  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ . La S være skjæringspunktet mellom BQ og AP.

$$\vec{AB} = \vec{a}$$
$$\vec{AC} = \vec{b}$$

$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$
$$\vec{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$$
$$\vec{BC} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{AB} + \vec{BP} = \vec{AP}$$
$$\vec{BP} = \frac{1}{5}\vec{BC}$$
$$\vec{AP} = \vec{AB} + \frac{1}{5}\vec{AC}$$
$$\vec{AP} = \vec{a} + \frac{1}{5}(\vec{b} - \vec{a})$$
$$\vec{AP} = \frac{1}{5}(\vec{b} + 4\vec{a})$$

$$\vec{BQ} = \vec{BA} + \vec{AQ}$$
$$\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AC}$$
$$\vec{BQ} = \vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC}$$
$$\vec{BQ} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$
$$\vec{BQ} = \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{4}{4}\vec{a}$$
$$\vec{BQ} = \frac{3\vec{b} - 4\vec{a}}{4}$$
$$\vec{BQ} = \frac{1}{4}(3\vec{b} - 4\vec{a})$$

a) Finn  $\vec{AS}$  på to måter og bestem  $\vec{AS}$  uttrykt ved  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$ .

$$\vec{AS} = \vec{AP} \cdot x$$

$$\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{BQ} \cdot y$$

$$\vec{AP} \cdot x = \vec{AB} + \vec{BQ} \cdot y$$

$$\left(\frac{1}{5}(\vec{b} + 4\vec{a})\right)x = \vec{a} + \left(\frac{1}{4}(3\vec{b} - 4\vec{a})\right)y$$

$$\left(\frac{\vec{b}}{5} + \frac{4\vec{a}}{5}\right)x = \vec{a} + \left(\frac{3\vec{b}}{4} - \vec{a}\right)y$$

$$\frac{\vec{b}x}{5} + \frac{4\vec{a}x}{5} = \vec{a} + \frac{3\vec{b}y}{4} - \vec{a}y$$

$$4\vec{b}x + 16\vec{a}x = 20\vec{a} + 15\vec{b}y - 20\vec{a}y$$

$$4\vec{b}x - 15\vec{b}y = 20\vec{a} - 16\vec{a}x - 20\vec{a}y$$

$$\vec{b}(4x - 15y) = \vec{a}(20 - 16x - 20y)$$

vektorene  $a$  og  $b$  må være like dersom leddene er like  
som betyr at koeffisientene må være 0

$$4x - 15y = 0$$

$$20 - 16x - 20y = 0$$

$$16x - 60y = 0$$

$$20 - 16x - 20y = 0$$

$$(20 - 16x - 20y) + (16x - 60y) = 0$$

$$20 - 80y = 0$$

$$\frac{80y}{80} = \frac{20}{80}$$

$$\underline{y = \frac{1}{4}}$$

$$4x - 15y = 0$$

$$4x - 15\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{15}{4} : 4$$

$$x = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\underline{x = \frac{15}{16}}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AP} \cdot x$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{5}(\vec{b} + 4\vec{a}) \frac{15}{16}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AS} = \frac{3}{16}(\vec{b} + 4\vec{a})}}$$

$$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \cdot y$$

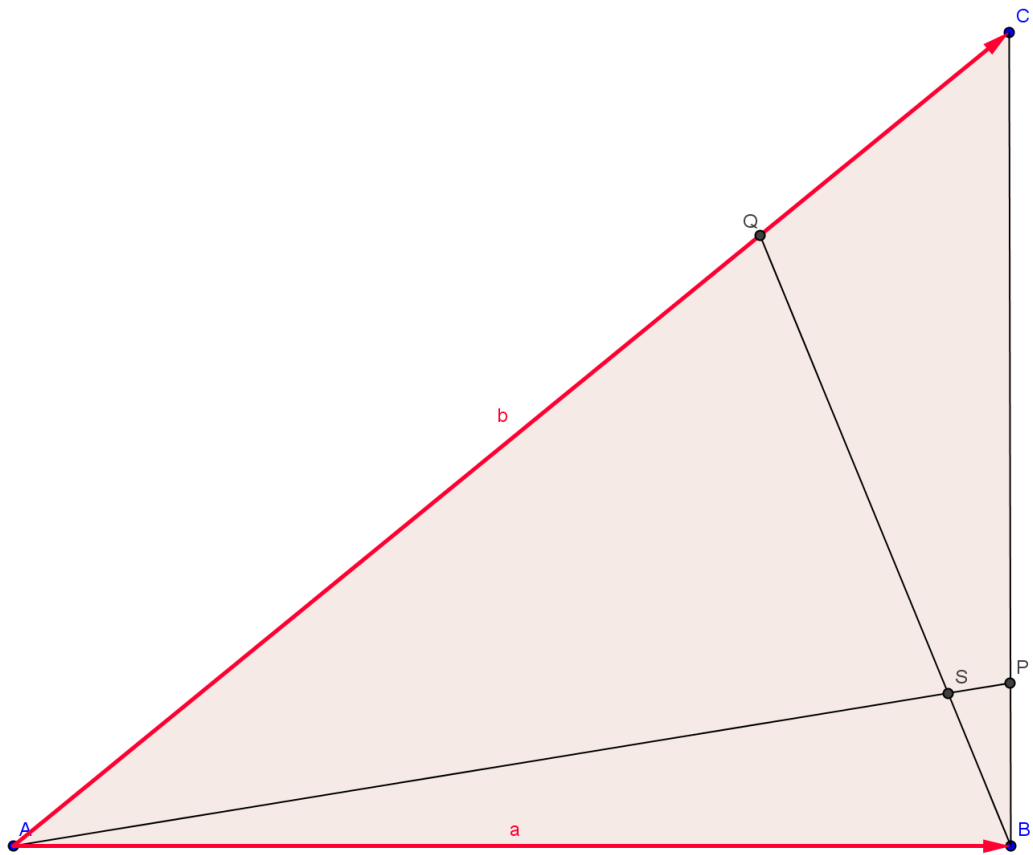
$$\overrightarrow{AS} = a + \frac{1}{4}(3\vec{b} - 4\vec{a}) \frac{1}{4}$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{16a}{16} + \frac{1}{16}(3\vec{b} - 4\vec{a})$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{16}(3\vec{b} - 4\vec{a} + 16\vec{a})$$

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{16}(3\vec{b} + 12\vec{a})$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AS} = \frac{3}{16}(\vec{b} + 4\vec{a})}}$$

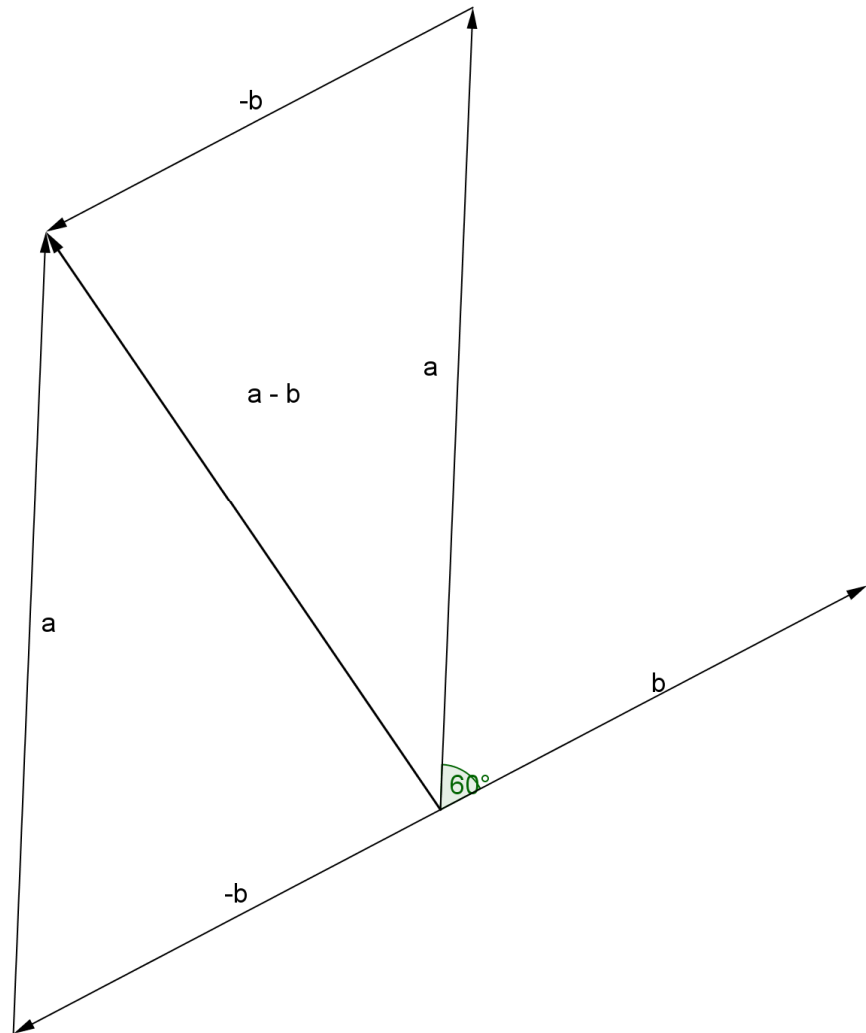
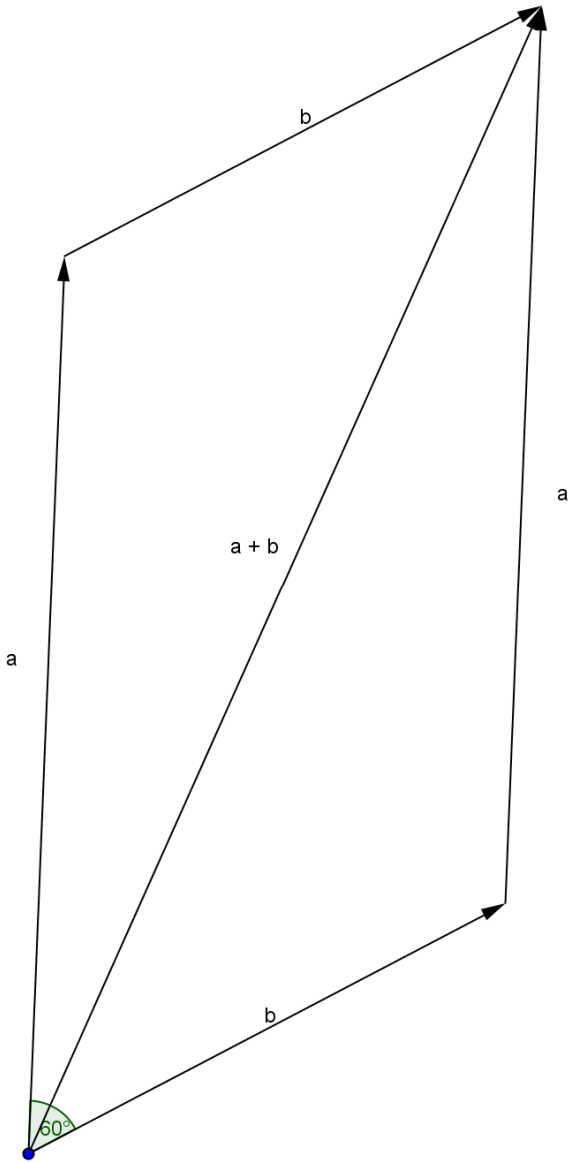


$$\frac{3}{16}(\vec{b} + 4\vec{a})$$

Oppgave 2

La  $|a| = 5$ ,  $|b| = 3$  og  $\angle(a, b) = 60^\circ$ .

a) Tegn  $u = a + b$  og  $v = a - b$ .



a) Finn vinkelen mellom  $\vec{u}$  og  $\vec{v}$  ved regning.

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{\sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} \cdot \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2}}$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\begin{pmatrix} \vec{a}^2 & -\vec{b}^2 \end{pmatrix}}{\sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2} \cdot \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + \vec{b}^2}}$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| + |\vec{b}|^2}}$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{25 - 9}{\sqrt{25 + 2 \cdot \frac{15}{2} + 9} \cdot \sqrt{25 - 2 \cdot \frac{15}{2} + 9}}$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{25 - 9}{\sqrt{25 + 15 + 9} \cdot \sqrt{25 - 15 + 9}}$$

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{16}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{19}}$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos\left(\frac{16}{7\sqrt{19}}\right)$$

$$\underline{\underline{\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 58.373565^\circ}}$$

$$|a| = 5 \quad |b| = 3 \quad \angle(a, b) = 60^\circ$$

$$a^2 = |a|^2 = 5^2 = 25$$

$$b^2 = |b|^2 = 3^2 = 9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos \angle(a, b)$$

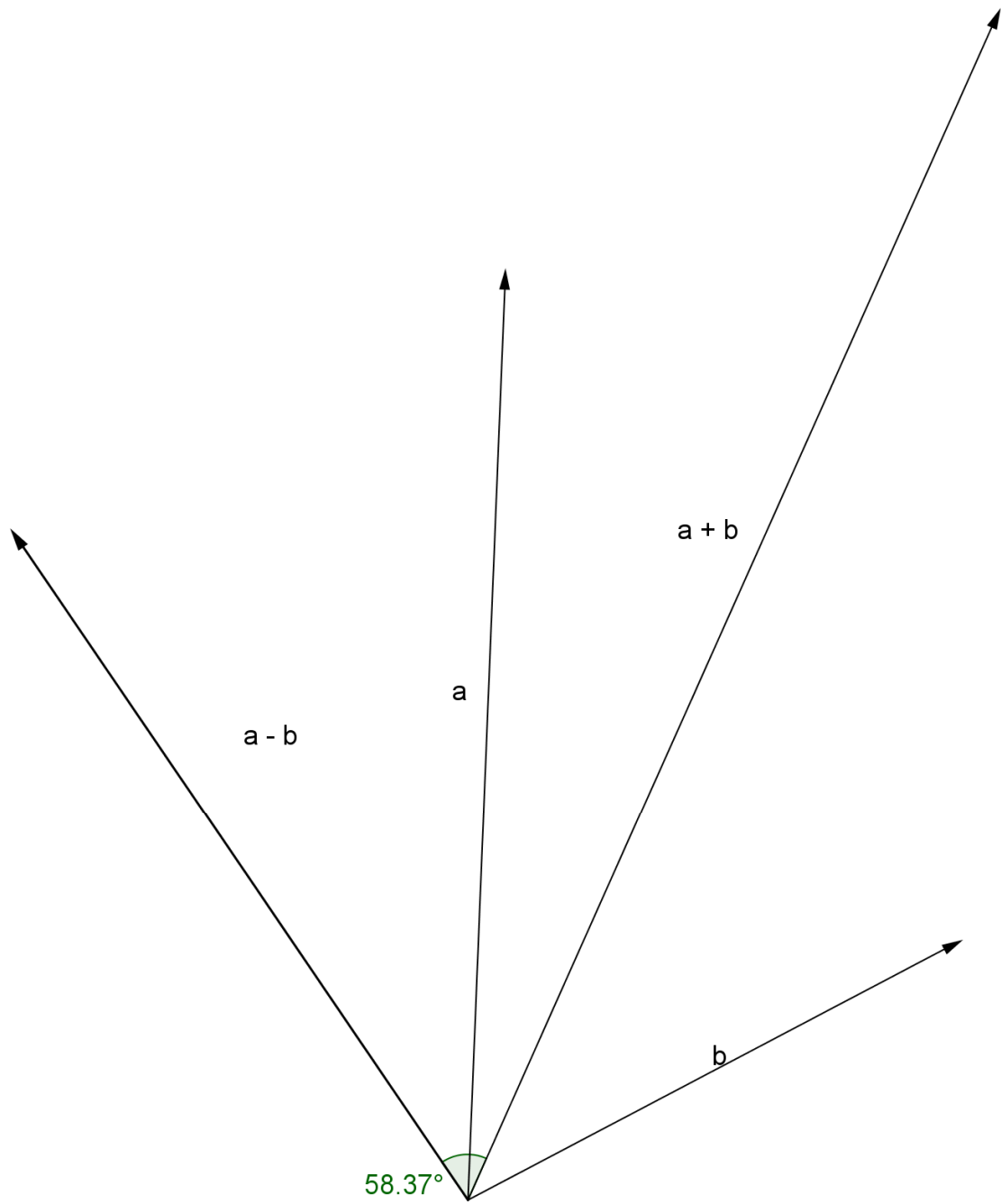
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 3 \cdot \cos 60$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{15}{2}$$

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$$



### Oppgave 3

Gitt  $A(-1, -1)$ ,  $B(4, 4)$  og  $C(0, 6)$ .

a) Bestem  $\overrightarrow{AB}$ ,  $|\overrightarrow{AB}|$  og  $|\overrightarrow{AC}|$ .

$A(-1, -1)$   $B(4, 4)$   $C(0, 6)$

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\overrightarrow{AB} = (4, 4) - (-1, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (-1), 4 - (-1))$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 + 1, 4 + 1)$$

$$\overrightarrow{AB} = [5, 5]$$

$$\vec{a} = \sqrt{ax^2 + ay^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 5^2}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 25}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt{2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0, 6) + (-1, -1)}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(0 - (-1))^2 + (6 - (-1))^2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2 + (7)^2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1 + 49}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 5\sqrt{2}$$

a) Bestem  $\angle BAC$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{(5,5)(1,7)}{(5\sqrt{2})(5\sqrt{2})}$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{(5 \cdot 1, 5 \cdot 7)}{5 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

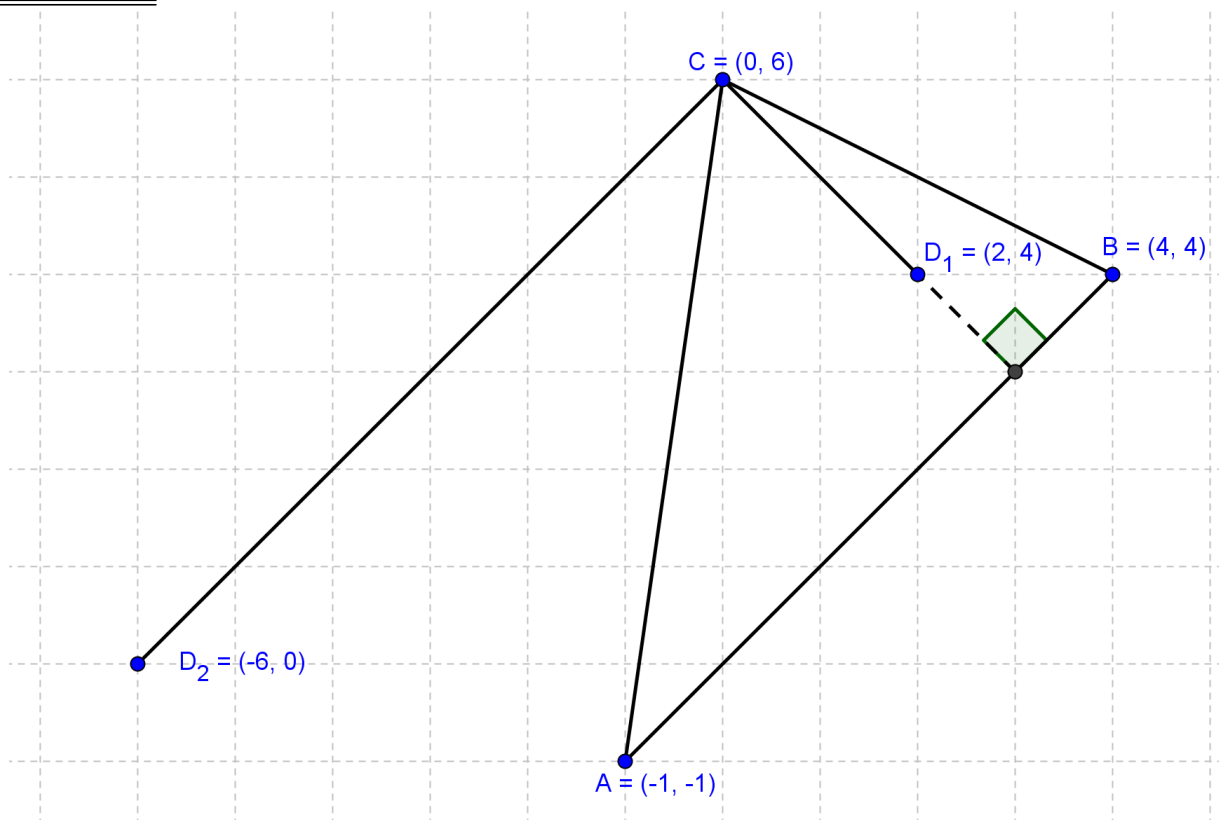
$$\cos(\angle BAC) = \frac{5 + 35}{25 \cdot 2}$$

$$\cos(\angle BAC) = \frac{40}{50}$$

$$\angle BAC = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\angle BAC \approx 36.869898^\circ$$

$$\underline{\underline{\angle BAC \approx 36.9^\circ}}$$



b) La  $D(2k, k + 3)$ .

i) Bestem koordinatene til D når  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ .

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot t = \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CD} = (0, 6) - (2k, k + 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = [-2k, -k + 9]$$

$$\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot t = \overrightarrow{CD}$$

$$[5, 5]t = [-2k, -k + 3]$$

$$[5t, 5t] = [-2k, -k + 3]$$

$$5t = -2k$$

$$5t = -k + 3$$

$$5t = -2k$$

$$k = 3 - 5t$$

$$5t = -2(3 - 5t)$$

$$5t = -6 + 10t$$

$$5t = 6$$

$$t = \frac{6}{5}$$

$$k = 3 - 5t$$

$$k = 3 - 5 \cdot \frac{6}{5}$$

$$\underline{\underline{k = -3}}$$

$$D = (2k, k + 3)$$

$$D = (2(-3), (-3) + 3)$$

$$\underline{\underline{D = (-6, 0)}}$$

ii) Bestem koordinatene til D når  $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} = (4, 4) - (-1, -1)$$

$$\overrightarrow{AB} = [5, 5]$$

$$\overrightarrow{CD} = (0, 6) - (2k, k + 3)$$

$$\overrightarrow{CD} = [-2k, -k + 3]$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$[5, 5] \cdot [-2k, -k + 3] = 0$$

$$[5(-2k), 5(-k + 3)] = 0$$

$$[-10k, -5k + 15] = 0$$

$$-10k + (-5k + 15) = 0$$

$$-10k - 5k + 15 = 0$$

$$\frac{-15k}{-15} = \frac{-15}{-15}$$

$$\underline{\underline{k = 1}}$$

$$D = (2k, k + 3)$$

$$D = (2 \cdot 1, 1 + 3)$$

$$\underline{\underline{D = (2, 4)}}$$

#### Oppgave 4

a) Bruk vektorregning til å vise at midtpunktet  $M$  på  $AB$  har koordinatene  $(4, 2)$ .

$$A(2,1) \quad B(6,3)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OM} = [2,1] + \frac{1}{2} [(6,3) - (2,1)]$$

$$\overrightarrow{OM} = [2,1] + \frac{1}{2} [4,2]$$

$$\overrightarrow{OM} = [2,1] + [2,1]$$

$$\overrightarrow{OM} = [4,2]$$

$$\underline{\underline{M = (4,2)}}$$

b) Vis at  $[-2, 4]$  står normalt på  $AB$ .

$$\overrightarrow{OG} = [-2, 4]$$

$$\overrightarrow{AB} = [4, 2]$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OG} = 0$$

$$[4, 2] \cdot [-2, 4] = 0$$

$$(4(-2)) + (2 \cdot 4) = 0$$

$$-8 + 8 = 0$$

$$0 = 0$$

$AB$  står normalt på  $OG$

c) Forklar at en linje l gjennom M som står vinkelrett på AB kan skrives slik :

$$l: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$$

Vi vet at en eller annen linje skal stå vinkelrett på AB

Derfor må

$$AB \perp MX \Leftrightarrow AB \cdot MX = 0$$

$$[4, 2] \cdot [x, y] = 0$$

$$4x + 2y = 0$$

Diofantiske løsninger gir

$$x = \pm 2 \text{ og } y = \pm 4$$

som betyr at  $[4, 2] \cdot [2, -4]$  Eller  $[4, 2] \cdot [-2, 4]$  er lik 0

På parameterform gir dette oss

$$l = \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{cases} \quad \text{eller} \quad l = \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$$

QED

d) Linja l skjærer y - akse i C. Bestem koordinatene til C.

$$l: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$$

der  $x = 0$  skjærer L y - akse

$$0 = 4 - 2t$$

$$2t = 4$$

$$t = 2$$

$$y = 2 + 4t$$

$$y = 2 + 4 \times 2$$

$$y = 2 + 8$$

$$\underline{y = 10}$$

Kordinatene til C er (0,10)

e) Finn en parameterframstilling for en linje gjennom C parallell med AB.

*Stigningstallet til AB er*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{6-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

*Dermed må stigningstallet til C også være  $\frac{1}{2}$*

*For hver verdi av x går y opp  $\frac{1}{2}$*

$C(0,10)$

*Går vi fire steg bort får vi*

$C_1(4,12)$

$C_1 - C$

$(4,12) - (0,10)$

$(4,2)$

*Setter vi dette inn i en parameterfremstilling får vi*

$$k: \begin{cases} x = 0 + 4t \\ y = 10 + 2t \end{cases}$$

$$k: \begin{cases} x = 4t \\ y = 10 + 2t \end{cases}$$

*QED*

f) Et punkt P er gitt ved  $P(4t, 10 + 2t)$  Bestem arealet av trekanten ABP.

Punktet P ligger på parameterfremstillingen for C  
 Det betyr at P og AB er paralelle linjer, disse to linjene vil alltid være like langt fra hverandre.

Da er avstanden mellom P og AB (høyden) konstant

Vi vet også at avstanden AB (grunnflaten) ikke forandrer seg.

Siden vi vet at høyden og Grunnflaten ikke forandrer seg

kan vi klare å finne et gitt tall for arealet av ABP

Korteste avstand mellom P og AB er MC

Dermed kan vi omskrive arealet slik

$$A = \frac{G \cdot h}{2}$$

$$\Delta_{ABP} = \frac{|MC| \cdot |AB|}{2}$$

$$MC = (0, 10) - (4, 2)$$

$$MC = (0 - 4, 10 - 2)$$

$$MC = (-4, 8)$$

$$|MC| = \sqrt{MC^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 64}$$

$$= \sqrt{80}$$

$$= 4\sqrt{5}$$

$$|AB| = \sqrt{AB^2}$$

$$|AB| = \sqrt{4^2 + 2^2}$$

$$|AB| = \sqrt{16 + 4}$$

$$|AB| = \sqrt{20}$$

$$|AB| = 2\sqrt{5}$$

$$\Delta_{ABP} = \frac{G \cdot h}{2}$$

$$\Delta_{ABP} = \frac{|MC| \cdot |AB|}{2}$$

$$\Delta_{ABP} = \frac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Delta_{ABP} = 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$\Delta_{ABP} = 4 \cdot 5$$

$$\underline{\underline{\Delta_{ABP} = 20}}$$

