

Oppgave 5 (Alternativ I)

En sylinderformet vanntank inneholder 100 liter vann. Det blir så laget et hull i bunnen av tanken. Etter 5 minutter er det 25 liter vann igjen i tanken. La $y(t)$ være vannmengden i tanken etter t minutter. Vi kan vise at den farten vannet renner ut med, målt i liter per minutt, er alltid proporsjonal med kvadratrota av den vannmengden som er i tanken.

- a) Vis at vannmengden i tanken er en løsning av differensiallikningen

$$y' + k\sqrt{y} = 0$$

der k er en positiv konstant.

- b) Forklar at differensiallikningen er separabel.

- c) Vis ved å løse differensiallikningen at

$$2 \cdot \sqrt{y(t)} = C - kt$$

der C er en konstant.

- d) Finn konstantene C og k .

- e) Hvor lang tid går det før tanken er tom?

- f) Når tanken er tom, blir det fylt vann i tanken ved hjelp av en slange som gir 14 liter vann per minutt.

Hvordan går det da med vannmengden i tanken etter lang tid?

Oppgave 5 (Alternativ II)

Vi har gitt differensiallikningen

$$y' = \frac{e^x}{y^2}$$

- a) Tegn et retningsdiagram for differensiallikningen.
 b) Tegn den integralkurven som går gjennom punktet $(0, 1)$.
 c) Forklar at differensiallikningen er separabel.
 d) Løs differensiallikningen ved regning.
 e) Finn likningen for integralkurven i oppgave b.
 f) For store verdier for x vil alle integralkurvene ligge nær grafen til funksjonen

$$f(x) = k \cdot e^{\frac{x}{2}}$$

for en bestemt verdi for k .
 Finn den eksakte verdien for k .

FASIT

Sinus R2

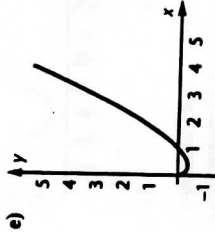
Oppgave 1

- a) 1) $2x^2 + 3x + C$ 2) $2e^x + C$
 b) 1) $a_{12} = 46$ og $a_n = 4n - 2$ 3) $\ln|x+1| - \ln|x+2| + C$
 2) $s_{12} = 288$ og $s_n = 2n^2$

Oppgave 2

- a) $x = 1$ c) $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

- d) Ingen vendepunkter



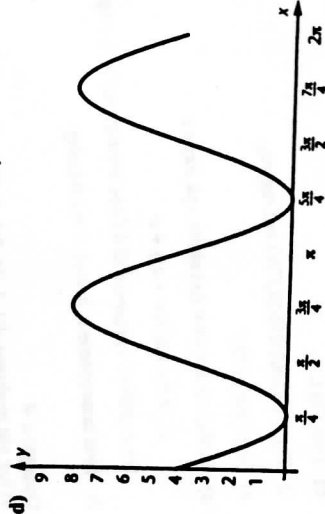
e) $\frac{e^2 + 1}{4}$

Oppgave 3

a) $x = \frac{\pi}{4}$ og $x = \frac{5\pi}{4}$

b) $f'(x) = 8(\sin^2 x - \cos^2 x)$

c) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ og $x = \frac{7\pi}{4}$



e) $a = -4$, $k = 2$, $c = 0$ og $d = 4$

f) $a = -4$, $k = 2$, $c = 0$ og $d = 4$

Oppgave 4

a) $\angle A = 21.8^\circ + 6^\circ$ b) $[-4, -1, 3]$

f) $[-4, -1, 3]$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{26} = 2,55$ d) 1,36

De to vektorproduktene er like. Forklaring: Etersom linja l er parallell med AB , vil ikke arealet av trekanten ABP endre seg når vi flytter punktet P langs linja. Dermed må absoluttverdien av $AB \times AP$ være uendret og dermed ha samme verdi som absoluttverdien av $AB \times AC$. Etersom A, B, C og P ligger i samme plan, har vektorene også samme retning.