

## Oppgave 4

Newtons 2. lov sier at  $F = m \cdot a$ , der  $F$  er summen av kreftene som virker på en gjenstand med masse  $m$  og akselerasjon  $a$ .

Vi minner om at akselerasjonen er den deriverte av farten med hensyn på tiden.

Newtons 2. lov kan for eksempel brukes til å beskrive og studere fallskjermhopp.

En fallskjermhopper med fallskjermen har til sammen massen  $m$ . La  $v(t)$  være farten til hopperen ved tiden  $t$  etter uthoppet. Hoppingen skjer fra et utoverhengende fjell, slik at vi kan anta at  $v(0) = 0$ . Det er to krefter som virker på hopperen: tyngdekraften  $m \cdot g$  og luftmotstanden som er  $-k_1 \cdot v(t)$  når fallskjermen er lukket. Her er  $k_1$  en konstant og  $g$  er tyngdeakselerasjonen. Alle størrelsene har benevnning i SI-systemet, det vil si at masse måles i kg, tid måles i sekunder og strekning måles i meter.

a) Vis at Newtons 2. lov kan omformes til følgende differensiallikning:

$$v'(t) + \frac{k_1}{m}v(t) = g$$

Vi setter  $m = 80$ ,  $g = 10$  og  $k_1 = 16$ .

b) Vis at  $v(t) = 50 - 50 \cdot e^{-0,2t}$  er en løsning av differensiallikningen i a).

c) Finn farten og akselerasjonen til hopperen når  $t = 4$ .

Etter 5 sekunder drar hopperen i snora og utløser fallskjermen. Vi regner med at luftmotstanden nå blir  $-k_2 \cdot v(t)^2$ . Vi setter  $g = 10$  og  $k_2 = 8$ .

d) Bruk Newtons 2. lov til å sette opp en differensiallikning for situasjonen når fallskjermen er åpnet.

e) Differensiallikningen i d) er separabel. Vi setter  $v$  i stedet for  $v(t)$ . Vis at vi kan skrive differensiallikningen som:

$$\left( \frac{1}{10-v} + \frac{1}{10+v} \right) \frac{dv}{dt} = 2$$

f) Finn et uttrykk for  $v$  ved å løse differensiallikningen i e).