Eksempeloppgaver, april 2007 – Løsninger

Delprøve 1

Ingen hjelpemidler er tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal, cm-mål og vinkelmåler.

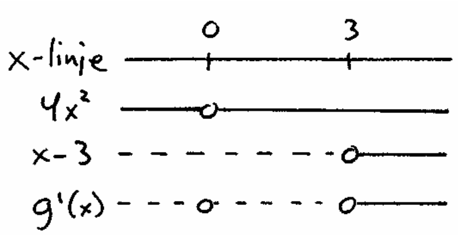
Oppgave 1

a $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$

$f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 2x \cdot e^{2x}(1 + x)$

b $g(x) = x^4 - 4x^3$

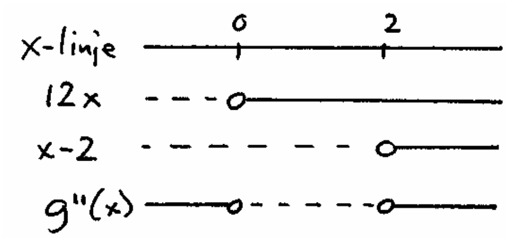
$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$



I Bunnpunkt: $(3, f(3)) = (3, -27)$

Terrassepunkt: $(0, f(0)) = (0, 0)$

II $g''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$



Vendepunkter: $(0, f(0)) = (0,0)$ og $(2, f(2)) = (2, -16)$

Punktet (0 , 0) er altså både et terrassepunkt og et vendepunkt.

c $$\frac{x^2+x}{x^2-4} - \frac{2}{4-2x} = \frac{x^2+x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2}{-2(x-2)} = \frac{x^2+x}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{2(x-2)}$$

$$= \frac{2(x^2+x)}{2(x+2)(x-2)} + \frac{2(x+2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{x^2+2x+2}{(x+2)(x-2)}$$

d Vi setter $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Dersom $P(x)$ har nullpunkt for $x = 1$, er $P(x)$ delelig med $(x-1)$.

$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$

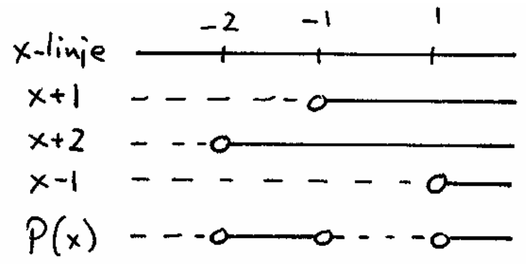
Altså er $x = 1$ en løsning på likningen $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, og $P(x)$ er delelig med $(x-1)$.

Vi utfører polynomdivisjon og finner at $\left(x^3 + 2x^2 - x - 2\right) : (x-1) = x^2 + 3x + 2$

$x^3 + 2x^2 - x - 2 \le 0$

$\left(x^2 + 3x + 2\right)\left(x-1\right) \le 0$

$\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x-1\right) \le 0$



$L = \langle \leftarrow, -2] \cup [-1, 1]$

e $\vec{r}(t) = \left[t^2 + 2t, \frac{1}{2}t^2\right]$

I $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [2t + 2, t]$

$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = [2, 1]$

II $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = [2t + 2, t] \cdot [2, 1] = 4t + 4 + t = 5t + 4$

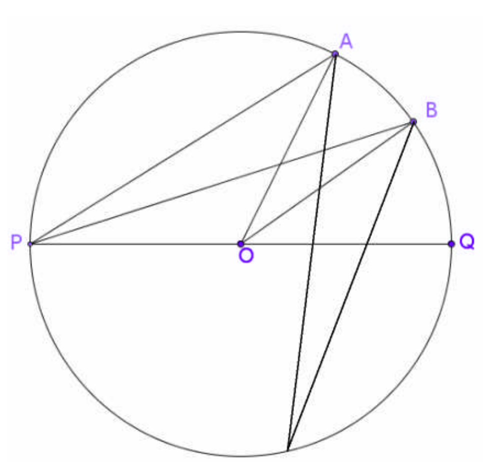
$5t + 4 = 0$

$t = -\frac{4}{5}$

For $t = -\frac{4}{5}$ er $\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$.

Oppgave 2

a



b $\triangle POA$ er likebeint fordi $PO = AO$ er lik radien i sirkelen.
$\triangle POB$ er likebeint fordi $PO = BO$ er lik radien i sirkelen.

c Vinkelsummen i en trekant er alltid $180°$. I $\triangle POB$ må vi derfor ha
$\angle PBO + \angle BPO + \angle POB = 180°$
Siden $\triangle POB$ er likebeint, se oppgave b, må $\angle BPO = \angle PBO$.
Videre er $\angle POB = 180° - \angle BOQ$.
Vi får nå $\angle PBO + \angle BPO + \angle POB = 180°$.
$\angle BPO + \angle BPO + \left(180° - \angle BOQ\right) = 180°$
$\angle BOQ = 2 \cdot \angle BPO$
På tilsvarende måte kan vi bevise at $\angle AOQ = 2 \cdot \angle APO$.

e Vi har $\angle BOQ = 2 \cdot \angle BPO = 2 \cdot \angle BPQ$.
Det gir $\angle BPQ = \frac{1}{2} \cdot \angle BOQ$, som viser setningen ovenfor.

Delprøve 2

Alle hjelpemidler er tillatte, bortsett fra verktøy som tillater elevene å kommunisere med andre.

Oppgave 3

a $$P\left(\text{like mange gutter som jenter på laget}\right) = \frac{\binom{9}{3} \cdot \binom{14}{3}}{\binom{23}{6}} = \frac{84 \cdot 364}{100\,947} = 0{,}303$$

b $P\left(A \cap B\right)$ betyr sannsynligheten for at både hendelsen A og hendelsen B inntreffer.
Her betyr A at personen er en gutt, og B at personen spiller volleyball.
$P\left(A \cap B\right)$ er derfor sannsynligheten for at vi trekker ut en gutt som spiller volleyball.
Det er 63 gutter som spiller volleyball. Dermed er $P\left(A \cap B\right) = \frac{63}{736} = 0{,}086$

c Det er $63 + 47 = 110$ personer som spiller volleyball. Dermed er $P(B) = \frac{110}{736} = 0{,}149$
Definisjonen av betinget sannsynlighet gir
$$P\left(B | A\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} = \frac{\frac{63}{736}}{\frac{348}{736}} = \frac{63}{348} = 0{,}181$$
Siden $P(B) \neq P(B \mid A)$, er A og B avhengige hendelser.

d Vi trekker tilfeldig én volleyballspiller og én som ikke spiller volleyball, og ser på hendelsene:

$J1$ = "volleyballspilleren er en jente"

$J2$ = "personen som ikke spiller volleyball er en jente"

Det er 110 personer som spiller volleyball, og $736-110=626$ som ikke gjør det.

Derfor er $P(J1)=\dfrac{47}{110}$ og $P(J2)=\dfrac{388-47}{626}=\dfrac{341}{626}$

Produktsetningen for uavhengige hendelser gir at

$$P(\text{to jenter})=P(J1\cap J2)=P(J1)\cdot P(J2)=\frac{47}{110}\cdot\frac{342}{626}=0,233$$

Oppgave 4

Alternativ I

a $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=\dfrac{0}{0}$

$x=-1$ er løsning av likningen $x^3+1=0$ fordi $(-1)^3+1=0$.

Vi utfører polynomdivisjonen $\left(x^3+1\right):\left(x+1\right)=x^2-x+1$.

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(x^2-x+1\right)\left(x+1\right)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-x+1\right)\left(x+1\right)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)}\to\infty$$

Grenseverdien eksisterer ikke.

Grafen til f har en vertikal asymptote med likningen $x=-1$.

b $$f'(x)=\frac{3x^2\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^3+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{3x^2\cdot(x+1)(x-1)-(x+1)(x^2-x+1)\cdot 2x}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)\left[3x^2(x-1)-\left(x^2-x+1\right)\cdot 2x\right]}{(x+1)^2\cdot(x-1)^2}=\frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)\cdot(x-1)^2}=\frac{x(x-2)(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

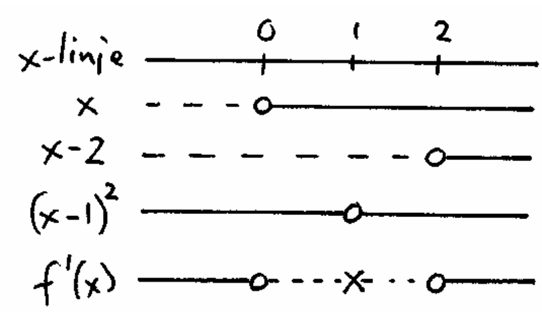
$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}=0$$

$x=0$ og $x=2$

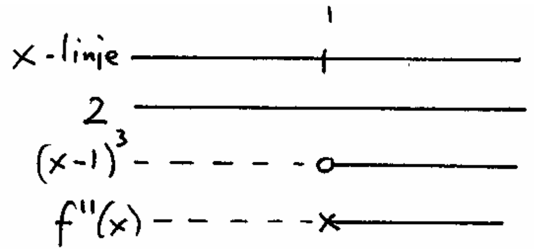


Toppunkt: $\left(0\,, f(0)\right) = \left(0\,,\ -1\right)$

Bunnpunkt: $\left(2\,, f(2)\right) = \left(2\,, 3\right)$

c $$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

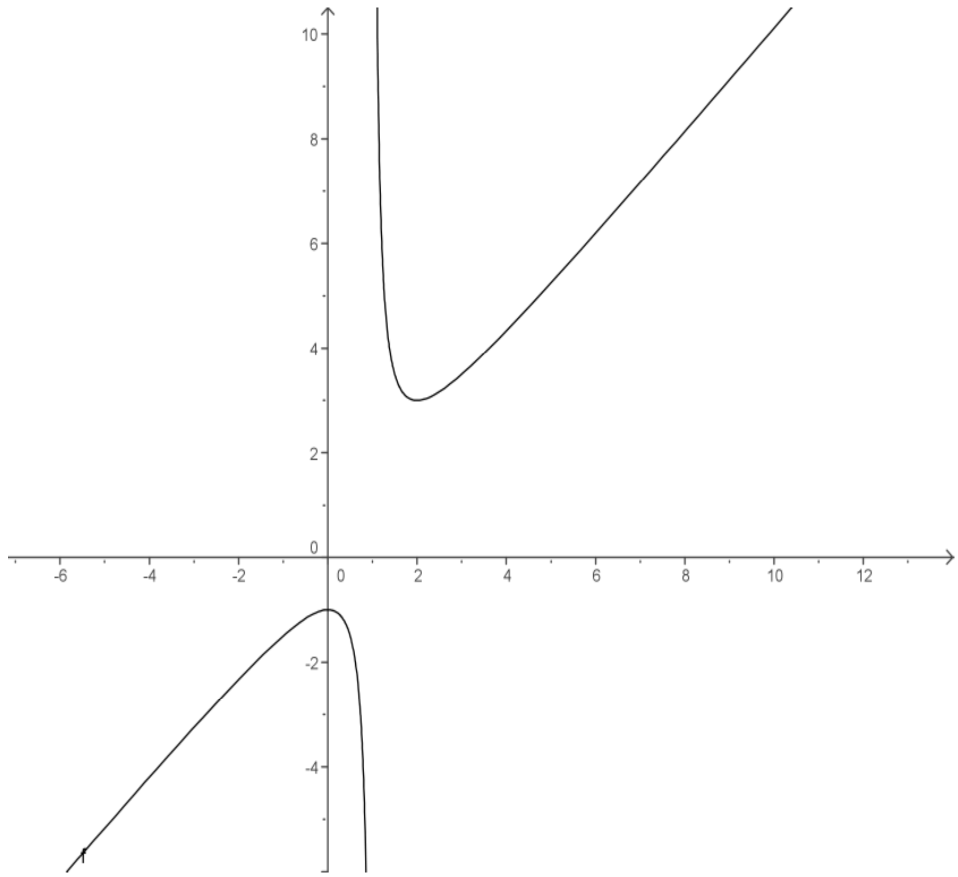
$$f''(x) = \frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2 - (x^2-2x)\cdot 2\cdot(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$



Den hule siden vender ned i intervallet $\langle \leftarrow, 1\rangle$.

Den hule siden vender opp i intervallet $\langle 1, \rightarrow\rangle$.

d



e $f\left(\mathrm{e}^x\right) = \dfrac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^{2x}-1}$

Vi ser at denne funksjonen likner funksjonen gitt i oppgave a ved at x er erstattet med e^x.

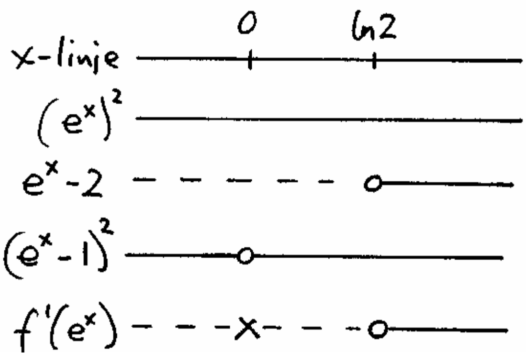
Da får vi $f'(\mathrm{e}^x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}\cdot \mathrm{e}^x = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-2\right)}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}\cdot \mathrm{e}^x = \dfrac{\left(\mathrm{e}^x\right)^2\left(\mathrm{e}^x-2\right)}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)^2}$.

$f'\left(x\right) = 0$ når $\mathrm{e}^x = 0$ eller $\mathrm{e}^x - 2 = 0$

$\mathrm{e}^x > 0$ for alle verdier av x.

$\mathrm{e}^x - 2 = 0$ for $x = \ln 2 = 0{,}693$

Vi tegner fortegnsskjema:



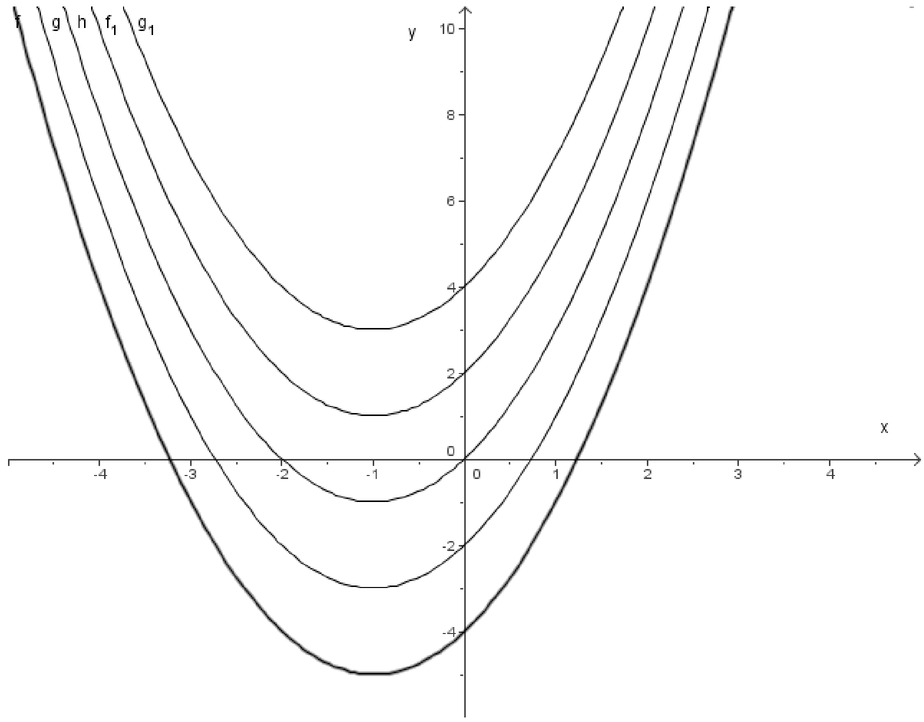
Bunnpunkt: $\left(\ln 2\,,\, f(\ln 2)\right) = \left(\ln 2\,,\, 3\right) = \left(0{,}693\,,\, 3\right)$

Vi kan også tegne grafen til funksjonen og finne bunnpunktet $\left(\ln 2\,,\, f(\ln 2)\right) = \left(\ln 2\,,\, 3\right) = \left(0{,}693\,,\, 3\right)$ ved hjelp av digitalt verktøy.

Oppgave 4

Alternativ II

a

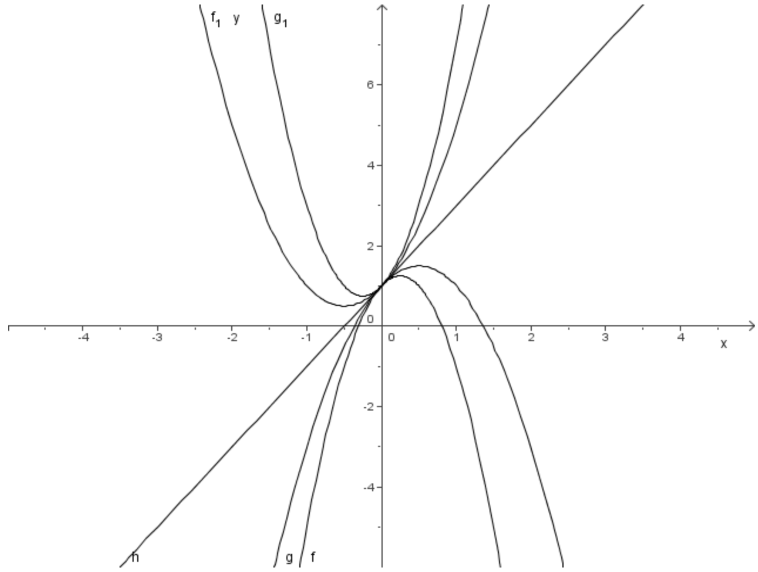


Grafene har bunnpunkt ved $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\cdot 1} = -1.$

$f(x) = x^2 + 2x + c$

De ulike verdiene for c gir skjæringspunktet med andreaksen.

b



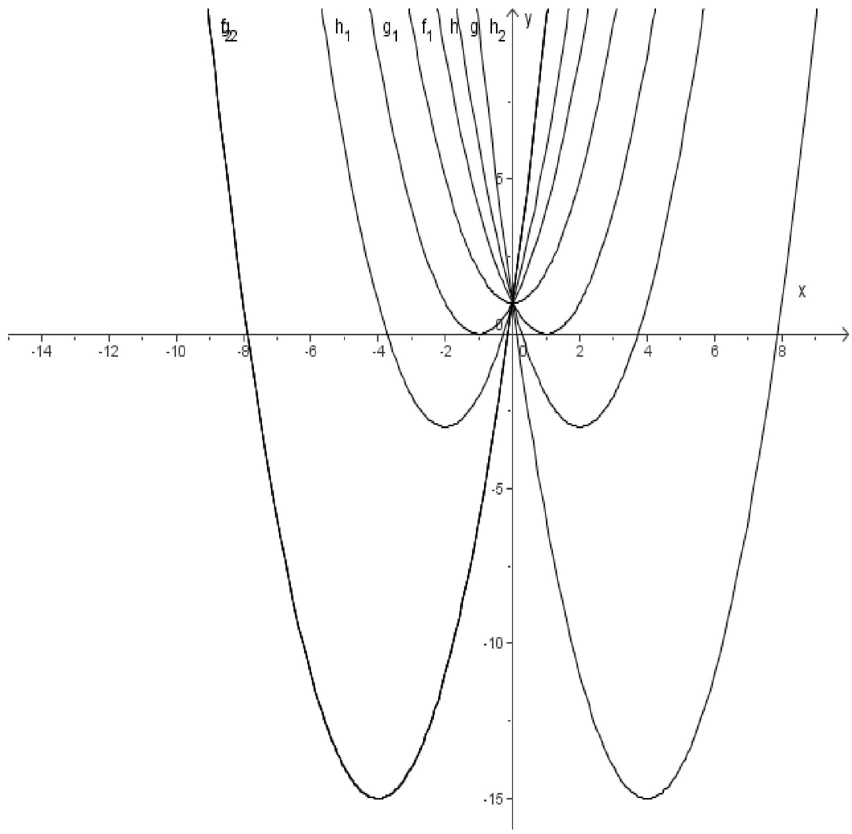
$f(x) = a \cdot x^2 + 2x + 1$

Alle grafene går gjennom punktet (0 , 1).

For $a > 0$ vender grafen den hule siden opp.

For $a < 0$ vender grafen den hule siden ned.

c



d $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$

b	–8	– 4	– 2	0	2	4	8
Bunnpunkt	(4 , –15)	(2 , –3)	(1 , 0)	(0 , 1)	(–1 , 0)	(–2 , –3)	(–4 , –15)

Av grafen og tabellen kan vi se at bunnpunktene ligger på grafen til funksjonen
$g(x) = -x^2 + 1$

e $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

Vi finner ekstremalpunktene ved å sette $f'(x) = 0$.
$2 \cdot a \cdot x + b = 0$

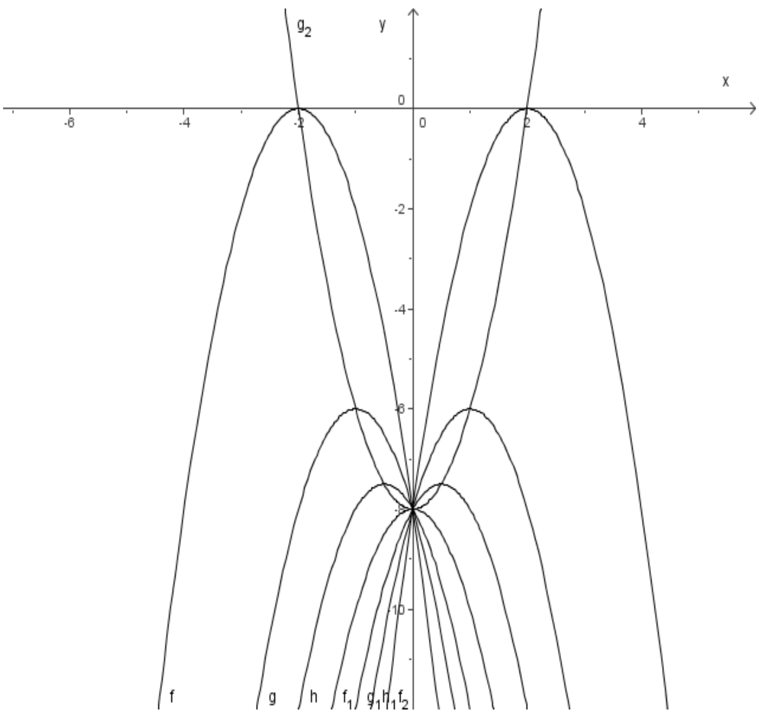
$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = -\frac{b^2}{4a} + c$$

Koordinatene til ekstremalpunktet er $\left(-\frac{b}{2a} \; , \; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$.

Vi har at $b = -2 \cdot a \cdot x$, som settes inn i uttrykket for y (andrekoordinaten) i uttrykket ovenfor. Det gir $-\frac{(-2 \cdot a \cdot x)^2}{4a} + c = -a \cdot x^2 + c$.
Sammenhengen mellom koordinatene til ekstremalpunktet er altså gitt ved
$g(x) = -a \cdot x^2 + c$
For $f(x) = x^2 + b \cdot x + 1$ ligger bunnpunktene på kurven til funksjonen
$g(x) = -x^2 + 1$

f



Toppunktene ligger på kurven gitt ved funksjonen $g(x) = 2x^2 - 8$.
Her har vi brukt $g(x) = -a \cdot x^2 + c$ fra oppgave e, med $a = -2$ og $c = -8$.

Oppgave 5

a $\overrightarrow{AB} = [4\,,0]$ $\overrightarrow{AC} = [1\,,4]$ $\overrightarrow{BC} = [-3\,,4]$

b $x_{M_1} = \dfrac{0+4}{2} = 2$ $y_{M_1} = \dfrac{0+0}{2} = 0$

Koordinatene til M_1 er $(2\,,0)$.

$x_{M_2} = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ $y_{M_2} = \dfrac{0+4}{2} = 2$

Koordinatene til M_2 er $\left(\dfrac{1}{2}\,,2\right)$.

c $k \cdot \overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CB} + t \cdot \overrightarrow{BM_2}$

$\overrightarrow{CM_1} = [1\,,-4]$ $\overrightarrow{CB} = [3\,,-4]$ $\overrightarrow{BM_2} = \left[-\dfrac{7}{2}\,,2\right]$

$$k \cdot [1\,,-4] = [3\,,-4] + t \cdot \left[-\frac{7}{2}\,,2\right]$$

$$[k\,,-4k] = [3\,,-4] + \left[-\frac{7}{2}t\,,2t\right]$$

$$[k\,,-4k] = \left[3-\frac{7}{2}t\,,-4+2t\right]$$

d $k = 3 - \dfrac{7}{2}\cdot t$

$-4 \cdot k = -4 + 2 \cdot t$

$$-4\cdot\left(3-\frac{7}{2}\cdot t\right) = -4 + 2\cdot t$$

$$-12 + 14t = -4 + 2t$$

$$12t = 8$$

$$t = \frac{2}{3}$$

$$k = 3 - \frac{7}{2}\cdot t = 3 - \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

e $\overrightarrow{CS} = k \cdot \overrightarrow{CM_1} = \frac{2}{3} \cdot [1\,,\ -4] = \left[\frac{2}{3}\,,\ -\frac{8}{3}\right]$

Posisjonsvektoren til S er $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} = [1, 4] + \left[\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right] = \left[1 + \frac{2}{3}, 4 - \frac{8}{3}\right] = \left[\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]$

Koordinatene til punktet S er da $\left(\frac{5}{3}\,,\ \frac{4}{3}\right)$.

f Vi kaller midtpunktet av BC for M_3.

Vi finner koordinatene til M_3 ved regning slik:

$$\left(\frac{x_B + x_C}{2}\,,\ \frac{y_B + y_C}{2}\right) = \left(\frac{4+1}{2}\,,\ \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\,,\ 2\right)$$

$$\overrightarrow{AM_3} = \left[\frac{5}{2}\,,\ 2\right]$$

$$\overrightarrow{AS} = \left[\frac{5}{3}\,,\ \frac{4}{3}\right]$$

Dersom den tredje medianen skal gå gjennom punktet S, kan vi sette

$$\overrightarrow{AM_3} = l \cdot \overrightarrow{AS}$$

Det gir $\left[\frac{5}{2}\,,\ 2\right] = l \cdot \left[\frac{5}{3}\,,\ \frac{4}{3}\right]$

Vi løser vektorlikningen og finner

$\frac{5}{2} = l \cdot \frac{5}{3}$. Det gir $l = \frac{3}{2}$.

$2 = l \cdot \frac{4}{3}$. Det gir $l = \frac{3}{2}$.

Vi får samme verdi for l. Siden vektorlikningen $\overrightarrow{AM_3} = l \cdot \overrightarrow{AS}$ har løsning, må den tredje medianen (AM_3) gå gjennom S.