EKSAMEN 3MX våren 2001

Løsning og vurdering av settet

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene *f* og *g* gitt ved

1) $f(x) = e^{3x}$ **2)** $g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3})$

Løsning:

1) $f'(x) = e^{3x} \cdot (3x)' = e^{3x} \cdot 3 = \underline{\underline{3e^{3x}}}$

2) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2 + \frac{x}{3}} \cdot (x^2 + \frac{x}{3})' = \dfrac{1}{x^2 + \frac{x}{3}} \cdot (2x + \frac{1}{3}) = \dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x^2 + \frac{x}{3}} = \underline{\underline{\dfrac{6x+1}{3x^2 + x}}}$

Alternativ løsning:

2) $g(x) = \ln(x^2 + \frac{x}{3}) = \ln\left(x(x + \frac{1}{3})\right) = \ln x + \ln(x + \frac{1}{3})$

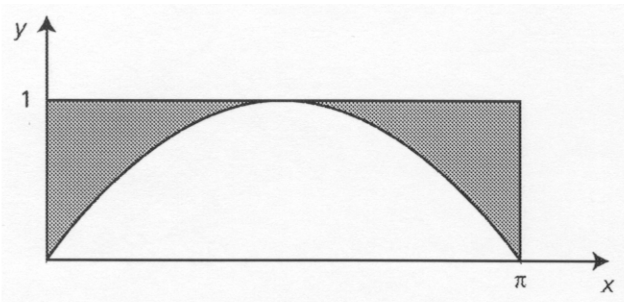
$g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + \frac{1}{3}} \cdot (x + \frac{1}{3})' = \underline{\underline{\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{3x+1}}}$

b) Bestem integralet $\int (e^x + \frac{4}{x} - 1)dx$ **.**

Løsning:

$$\int (e^x + \frac{4}{x} - 1)dx = \underline{\underline{e^x + 4\ln|x| - x + C}}$$

c) Det skraverte området på figuren er avgrenset av grafen til $y = \sin x$ og $y = 1$, y-aksen og linja $x = \pi$.



Finn arealet av det skraverte området.

Løsning:

Metode 1

Vi oppfatter området som et område mellom to grafer. Ettersom grafen til $y = 1$ er øverst i hele intervallet, er

$$A = \int_0^{\pi} (1 - \sin x)dx = \left[x + \cos x\right]_0^{\pi} = (\pi + \cos\pi) - (0 + \cos 0) = \pi - 1 - 1 = \underline{\underline{\pi - 2}}$$

Metode 2

Vi regner først ut arealet mellom x-aksen og grafen til $y = \sin x$.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

Arealet av rektangelet som omslutter området, er $\pi \cdot 1 = \pi$. Arealet av det skraverte området er dermed

$$\underline{\underline{A = \pi - 2}}$$

d) Likningen til en ellipse er gitt ved

$$\mathbf{16x^2 + 25y^2 - 96x + 100y = 156}$$

Finn sentrum og halvaksene til ellipsen.

Løsning:

Vi omformer likningen:

$$16x^2 + 25y^2 - 96x + 100y = 156$$
$$16x^2 - 96x + 25y^2 + 100y = 156$$
$$16(x^2 - 6x) + 25(y^2 + 4y) = 156$$
$$16(x^2 - 6x + 3^2) + 25(y^2 + 4y + 2^2) = 156 + 16 \cdot 3^2 + 25 \cdot 2^2$$
$$16(x - 3)^2 + 25(y + 2)^2 = 400$$
$$\frac{\cancel{16}(x-3)^2}{\underset{25}{\cancel{400}}} + \frac{\cancel{25}(y+2)^2}{\underset{16}{\cancel{400}}} = \frac{400}{400}$$
$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y+2)^2}{4^2} = 1$$

<u>Ellipsen har sentrum i (3, –2) og har halvaksene 5 og 4. Halvaksen 5 er i x-retning.</u>

e) I en by er det to bussruter, A og B. Rute A trafikkeres av 6 busser per time, og rute B trafikkeres av 4 busser per time. Begge bussrutene har stoppested på Torget. Sannsynligheten for at en buss kommer for sent til Torget, er 0,25 for rute A og 0,1 for rute B.

1) Finn sannsynligheten for at en tilfeldig buss kommer for sent til Torget.

Løsning:

Vi innfører hendingene

A: Bussen kjører rute A
B: Bussen kjører rute B
S: Bussen kommer for sent

Vi forutsetter at vi trekker tilfeldig blant de 10 bussene slik at vi kan bruke en uniform sannsynlighetsmodell. Da er

$$P(A) = \frac{6}{10} = 0,6 \qquad P(B) = \frac{4}{10} = 0,4$$
$$P(S \mid A) = 0,25 \qquad P(S \mid B) = 0,1$$

Den totale sannsynligheten er

$$P(S) = P(S \mid A) \cdot P(A) + P(S \mid B) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0,4 = \underline{\underline{0,19}}$$

2) Finn sannsynligheten for at en buss som kommer for sent, trafikkerer rute B.

Løsning:

Først finner vi sannsynligheten for at en tilfeldig valgt buss både trafikkerer rute B og kommer for sent.

$$P(B \cap S) = P(S \mid B) \cdot P(B) = 0,1 \cdot 0,4 = 0,04$$

Nå finner vi sannsynligheten for at en buss som kommer for sent, trafikkerer rute B.

$$P(B \mid S) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,04}{0,19} = \underline{\underline{\frac{4}{19}}} \approx \underline{\underline{0,21}}$$

Vi kan også bruke Bayes-setningen:

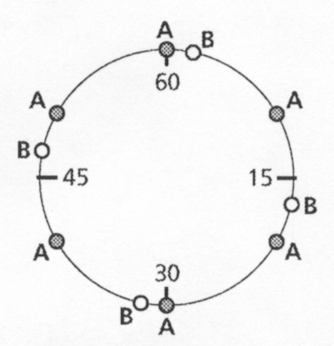
$$P(B \mid S) = \frac{P(S \mid B) \cdot P(B)}{P(S)} = \frac{0,1 \cdot 0,4}{0,19} = \frac{0,04}{0,19} = \underline{\underline{\frac{4}{19}}} \approx \underline{\underline{0,21}}$$

Vurdering*:*

Elever vil, med god grunn, bli usikre på den uniforme modellen. Hvordan skal uttrykket 'en tilfeldig buss' oppfattes? (Det heter vel egentlig en tilfeldig ***valgt*** *buss!?) Betyr det at vi legger bussene i en hatt og trekker tilfeldig blant de 10 bussene? Eller betyr det at vi går ned på Torget på et tilfeldig valgt tidspunkt og velger den bussen som kommer først? Hvis det er den siste tolkningen som er den riktige, må det komme en buss nøyaktig hvert 6. minutt hvis vi skal kunne benytte en uniform modell. Hvis rute A kommer hvert 10. minutt og rute B hvert 15. minutt, kan P(A) bli 0,7 og P(B) bli 0,3 avhengig av tidspunktene.*

Det kan vi se på denne måten:

Vi tenker oss at rute A har rutetid hh.00, hh.10, hh.20 osv. og at rute B har rutetid hh.02, hh.17, hh.32 og hh.47. Vi har valgt rutetidene slik at ingen buss skal komme samtidig.



Vi går ned på Torget på et tilfeldig valgt tidspunkt. Hvis buss B skal være den første bussen som kommer, må vi komme til Torget i ett av tidsrommene hh.00–hh.02, hh.10–hh.17, hh.30–hh.32 og hh.40–hh.47. Til sammen er dette

$$2 + 7 + 2 + 7 = 18$$

minutter. I de resterende 42 minuttene i løpet av en time treffer vi på buss A. Sannsynligheten for å treffe på buss A er $\frac{42}{60} = 0{,}7$. *Sannsynligheten for å treffe på buss B er* $\frac{18}{60} = 0{,}3$. *Det stemmer ikke med det vi regnet med i oppgaven.*

Oppgave 2

I en svømmehall måles temperaturen i vannet én gang om dagen. Resultatene har hittil vært tilnærmet normalfordelt med et gjennomsnitt på 23,0 °C og et standardavvik på 1,2 °C.

a) Finn sannsynligheten for at temperaturen i vannet på en tilfeldig dag er lavere enn 21°C.

Løsning:

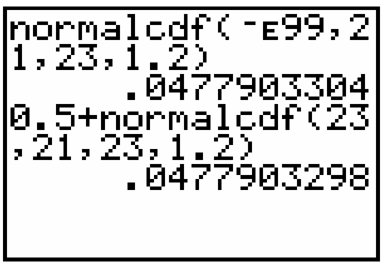
La T være temperaturen i vannet en tilfeldig valgt dag. Ifølge oppgaven er da T tilnærmet normalfordelt med $\mu = 23{,}0$ °C og $\sigma = 1{,}2$ °C.

Tabellmetoden

$$P(T < 21{,}0) = \Phi\left(\frac{21{,}0 - 23{,}0}{1{,}2}\right) = \Phi(-1{,}67) = \underline{\underline{0{,}048}}$$

Lommeregnermetoden

Vi viser to metoder på den samme skjermen:



$$P(T < 21) = \underline{\underline{0{,}048}}$$

Etter en justering av anlegget får vaktmesteren mistanke om at vanntemperaturen er høyere enn før. Han måler temperaturen i vannet én gang om dagen i 30 dager og finner et gjennomsnitt på 23,6 °C.

b) Foreta en hypotesetest for å undersøke om det er grunnlag for å hevde at gjennomsnitts-temperaturen nå er høyere enn 23,0 °C. Bruk et signifikansnivå på 5 %.

Løsning:
Ut fra opplysningene i oppgaven stiller vi opp disse hypotesene:

Nullhypotese: H_0: $\mu = 23{,}0$ °C
Mothypotese: H: $\mu > 23{,}0$ °C

Som testobservator velger vi gjennomsnittstemperaturen $\overline{T}$ i en måleserie med en måling per dag i $n = 30$ dager. $\overline{T}$ er da tilnærmet normalfordelt med forventningsverdi

$$\mu_{\overline{T}} = \mu = 23{,}0 \text{ °C}$$

og standardavvik

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}2 \text{ °C}}{\sqrt{30}} = 0{,}219$$

Ettersom signifikansnivået er 5 %, er den kritiske temperaturen T_0 bestemt ved at $P(\overline{T} > T_0) = 0{,}05$.

Det er det samme som at $P(\overline{T} \leq T_0) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Tabellmetoden
Vi slår opp i tabellen og finner at $z = 1{,}645$ svarer til sannsynligheten 0,95. Den kritiske temperaturen er

$$T_0 = \mu_{\overline{T}} + z \cdot \sigma_{\overline{T}} = 23{,}0 \text{ °C} + 1{,}645 \cdot 0{,}219 \text{ °C} = 23{,}36 \text{ °C}$$

Lommeregnermetoden

```
invNorm(0.95,23,
0.219)
     23.36022294
```

$$T_0 = 23{,}36 \text{ °C}$$

Vi forkaster dermed nullhypotesen hvis $\overline{T} \geq 23{,}4°$.

Dataene gir ikke grunnlag til å forkaste nullhypotesen hvis $\overline{T} \leq 23{,}3$ °C.

<u>Ettersom gjennomsnittstemperaturen er 23,6 °C i løpet av 30 dager, har vi grunn for å tro at forventet temperatur er for høy.</u>

Vurdering:

I oppgave 2b) bør vi ikke spørre om 'gjennomsnittstemperaturen nå er høyere enn 23,0 °C'. Vi burde spørre om 'forventet temperatur er høyere enn 23,0 °C'. Gjennomsnittstemperaturen i perioden er i utgangspunktet over 23,0 °C. Den er målt til 23,6 °C.

Det er vel også tvilsomt om T er en stokastisk variabel. Vil ikke en høy temperatur en dag påvirke temperaturen dagen etter? Varmekapasiteten til vann er som kjent ganske høy.

Vi skulle tro at T er ganske deterministisk. Det må være mulig å forutsi den ut fra varmetilførsel, romtemperatur, antall besøkende, tilførsel av friskt vann osv.

Ettersom systemet er lite stokastisk, ville en vaktmester stille ned effekten på varmeanlegget hvis gjennomsnittstemperaturen gjennom en måned var 0,6 °C for høy. Vi ville ikke ha fått utført noen hypotesetest først. (De aller fleste vaktmestere ville nok ha vært svært så fornøyd med anlegget hvis avviket var så lite som 0,6 °C.)

Er oppgaven virkelighetsnær?

Oppgave 3

En smertestillende medisin brytes ned i kroppen med en halveringstid på 2 timer. Vi lar $y = y(t)$ være medisinmengden (målt i milligram) i kroppen etter t timer. Da er y en løsning av differensiallikningen

$$y' = ky$$

der k er en konstant.

a) Løs differensiallikningen og vis at $k = -\frac{\ln 2}{2}$.

Løsning:

$$y' = ky$$
$$y' - ky = 0 \mid \cdot e^{-kt}$$
$$y' \cdot e^{-kt} - ky \cdot e^{-kt} = 0$$
$$(y \cdot e^{-kt})' = 0$$
$$y \cdot e^{-kt} = C \mid \cdot e^{kt}$$
$$\underline{\underline{y = Ce^{kt}}}$$

Ved $t = 0$ er

$$y = Ce^{k \cdot 0} = Ce^0 = C \cdot 1 = C$$

Ifølge opplysningene i oppgaven er da $y = \frac{C}{2}$ ved $t = 2$. Det gir likningen

$$Ce^{k\cdot 2} = \frac{C}{2}$$

$$e^{2k} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{2k} = \ln\frac{1}{2}$$

$$2k\cdot \ln e = \ln 1 - \ln 2$$

$$2k\cdot 1 = 0 - \ln 2$$

$$2k = -\ln 2$$

$$\underline{\underline{k = -\frac{\ln 2}{2}}}$$

En pasient får kontinuerlig tilførsel av denne medisinen. Dosen er 3 mg i løpet av en time.
b) Vi lar nå *y* = *y*(*t*) være medisinmengden i kroppen etter *t* timer. Forklar hvorfor

$$\boldsymbol{y' = ky + 3} \qquad \textbf{(1)}$$

der $\boldsymbol{k = -\frac{\ln 2}{2}}$**.**
Løs differensiallikningen (1).

Løsning:

Medisinen skilles ut fra kroppen med en vekstfart på *ky* der *k* er det negative tallet fra oppgave a. Det blir tilført medisin med en vekstfart på 3 mg per time. Samlet vekstfart i milligram blir dermed *ky* + 3. Dermed er

$$y' = ky + 3$$

Vi løser likningen:

$$y' = ky + 3$$

$$y' - ky = 3 \mid \cdot e^{-kt}$$

$$y'\cdot e^{-kt} - ky\cdot e^{-kt} = 3\cdot e^{-kt}$$

$$(y\cdot e^{-kt})' = 3\cdot e^{-kt}$$

$$y\cdot e^{-kt} = \int 3\cdot e^{-kt}dt$$

$$y\cdot e^{-kt} = 3\cdot\frac{1}{-k}\cdot e^{-kt} + C$$

$$y\cdot e^{-kt} = C - \frac{3}{k}\cdot e^{-kt} \mid \cdot e^{kt}$$

$$y = Ce^{kt} - \frac{3}{k}$$

Med $k = -\frac{\ln 2}{2}$ blir

$$y = Ce^{kt} - \frac{3}{k} = Ce^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot t} - \frac{3\cdot 2}{-\frac{\ln 2}{2}\cdot 2} = \underline{\underline{Ce^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot t} + \frac{6}{\ln 2}}}$$

Når behandlingen begynner ved $t = 0$, har pasienten en ukjent mengde y_0 av medisinen i kroppen fra en tidligere behandling.

c) Vis at $y = \left(y_0 - \frac{6}{\ln 2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} + \frac{6}{\ln 2}$.

Hva skjer med medisinmengden i kroppen når tiden går?

Løsning:

Ved $t = 0$, er $y = y_0$. Vi setter inn i uttrykket fra oppgave b og finner C.

$$Ce^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot 0} + \frac{6}{\ln 2} = y_0$$

$$C\cdot 1 + \frac{6}{\ln 2} = y_0$$

$$C = y_0 - \frac{6}{\ln 2}$$

Vi omformer uttrykket $e^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot t}$.

$$e^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot t} = e^{-\ln 2\cdot\frac{1}{2}\cdot t} = \left(e^{-\ln 2}\right)^{\frac{t}{2}} = \left(\frac{1}{e^{\ln 2}}\right)^{\frac{t}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$$

Innsetting gir

$$y = Ce^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot t} + \frac{6}{\ln 2} = \underline{\underline{\left(y_0 - \frac{6}{\ln 2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} + \frac{6}{\ln 2}}}$$

Når $t \to \infty$, vil $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \to 0$. Da vil medisinmengden

$$y = \left(y_0 - \frac{6}{\ln 2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} + \frac{6}{\ln 2} \to \left(y_0 - \frac{6}{\ln 2}\right)\cdot 0 + \frac{6}{\ln 2} = \frac{6}{\ln 2} \approx 8{,}7$$

<u>Medisinmengden vil nærme seg 8,7 mg når tiden går.</u>

Vurdering:

Oppgave a er for teknisk vanskelig til å være oppgave a. Det 'vanskelige' uttrykket $k = -\frac{\ln 2}{2}$ *kombinert med en differensiallikning vil ta motet fra mange av de svake elevene. De vil ha denne oppgaven blank.*

Kan vi forvente at alle elevene kjenner begrepet halveringstid? Vil ikke dette begrepet favorisere fysikkelever som kjenner begrepet fra arbeid med radioaktivitet?

Oppgave 4

En flygeleder følger flyet *F* på radaren. Kontrolltårnet er i origo *O*. Posisjonen til flyet ved et bestemt tidspunkt, $t = 0$, er gitt ved $\overrightarrow{OP} = [15, 30, 6]$. Alle avstander er målt i kilometer. Farten til flyet *F* er $\vec{v} = [-210, -50, 0]$. Farten er konstant og er målt i kilometer per time.

a) Vis at etter 6 minutter er posisjonen til flyet gitt ved vektoren $[-6, 25, 6]$.

Løsning:

Ettersom 6 minutter er det samme som $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$ time, er posisjonen etter 6 minutter gitt ved

$$\overrightarrow{OP} + \frac{1}{10}\vec{v} = [15, 30, 6] + \frac{1}{10}[-210, -50, 0] = [15, 30, 6] + [-21, -5, 0] = \underline{\underline{[-6, 25, 6]}}$$

b) Forklar at posisjonen *A* etter *t* minutter er gitt ved $\overrightarrow{OA} = [15 - \frac{7}{2}t, 30 - \frac{5}{6}t, 6]$.

Løsning:

Ettersom *t* minutter er det samme som $\frac{t}{60}$ time, er posisjonen etter *t* minutter gitt ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OP} + \frac{t}{60}\cdot\vec{v} = [15, 30, 6] + \frac{t}{60}\cdot[-210, -50, 0] \\ &= [15, 30, 6] + [-\frac{210}{60}\cdot t, -\frac{50}{60}\cdot t, 0] = \underline{\underline{[15 - \frac{7}{2}t, 30 - \frac{5}{6}t, 6]}}\end{aligned}$$

Flygelederen observerer på samme tidspunkt, $t = 0$, et annet fly *M* på radarskjermen. Posisjonen er da gitt ved $\overrightarrow{OQ} = [-30, -15, 5]$. Farten til flyet er konstant og gitt ved vektoren $\vec{u} = [150, 250, 60]$. Avstandene er målt i kilometer og farten i kilometer per time.

c) Bestem posisjonen *B* til flyet *M* når det har gått *t* minutter siden flygelederen observerte de to flyene på radaren.

Løsning:

Ettersom *t* minutter er det samme som $\frac{t}{60}$ time, er posisjonen etter *t* minutter gitt ved

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OQ} + \frac{t}{60}\cdot\vec{u} = [-30, -15, 5] + \frac{t}{60}\cdot[150, 250, 60] \\ &= [-30, -15, 5] + [\frac{150}{60}\cdot t, \frac{250}{60}\cdot t, \frac{60}{60}\cdot t] = \underline{\underline{[-30 + \frac{5}{2}t, -15 + \frac{25}{6}t, 5 + t]}}\end{aligned}$$

d) Vis at $\overrightarrow{AB} = [-45 + 6t, -45 + 5t, -1 + t]$.

Løsning:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
&= [-30 + \frac{5}{2}t, -15 + \frac{25}{6}t, 5 + t] - [15 - \frac{7}{2}t, 30 - \frac{5}{6}t, 6] \\
&= [-30 + \frac{5}{2}t - (15 - \frac{7}{2}t), -15 + \frac{25}{6}t - (30 - \frac{5}{6}t), 5 + t - 6] \\
&= [-30 + \frac{5}{2}t - 15 + \frac{7}{2}t, -15 + \frac{25}{6}t - 30 + \frac{5}{6}t, -1 + t] \\
&= \underline{\underline{[-45 + 6t, -45 + 5t, -1 + t]}}
\end{aligned}
$$

e) Hvor lang tid tar det før avstanden mellom flyene er kortest?

Løsning:

Avstanden d mellom flyene etter t minutter er

$$
\begin{aligned}
d &= \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-45 + 6t)^2 + (-45 + 5t)^2 + (-1 + t)^2} \\
&= \sqrt{2025 - 540t + 36t^2 + 2025 - 450t + 25t^2 + 1 - 2t + t^2} \\
&= \sqrt{62t^2 - 992t + 4051}
\end{aligned}
$$

Ettersom $\sqrt{x}$ har sin minste verdi når x har sin minste verdi, har d sin minste verdi når

$$f(t) = 62t^2 - 992t + 4051$$

har sin minste verdi. Grafen til f er en parabel med en minimalverdi i det punktet der $f'(t) = 0$. Vi deriverer og setter den deriverte lik null.

$$
\begin{aligned}
&f'(t) = 124t - 992 \\
&f'(t) = 0 \\
&124t - 992 = 0 \\
&t = \frac{992}{124} \\
&t = 8
\end{aligned}
$$

<u>Avstanden er minst etter 8 min.</u>

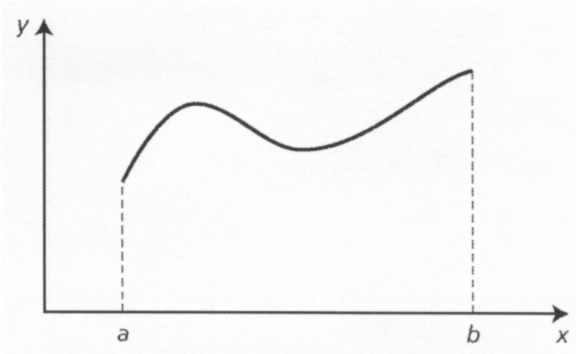
Denne oppgaven kan vi også løse på lommeregneren ved å legge inn utrykket for d og finne minimum.

Vurdering:

Denne oppgaven er mye lettere enn oppgave 3. Sammen med oppgave 1 bør den være planken for mange elever.

Oppgave 5

En funksjon er gitt ved $y = f(x)$ der $a \le x \le b$ og $f(x) \ge 0$. Se figuren til høyre.



Grafen f dreies om x-aksen.

Vi kan vise at overflaten O til det omdreiningslegemet som framkommer, er gitt ved

$$O = 2\pi\int_a^b y \cdot \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

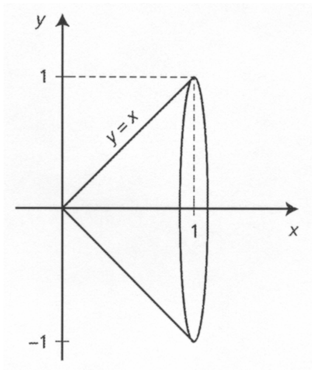
(Endeflatene er ikke regnet med.)

a) Bruk formelen ovenfor til å finne O når $f(x) = x$ og $0 \le x \le 1$.

Hva slags omdreiningslegeme er dette?

Kontroller svaret ved å bestemme sideflaten til dette omdreiningslegemet på en annen måte.

Løsning:



Her $y = x$ og $y' = 1$. Da er overflaten

$$O = 2\pi\int_0^1 y \cdot \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^1 x \cdot \sqrt{1+1^2}\,dx$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\int_0^1 x\,dx = 2\pi\sqrt{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \underline{\underline{\pi\sqrt{2}}}$$

<u>Omdreiningslegemet er ei kjegle med radius $r = 1$ og høyde $h = 1$.</u>

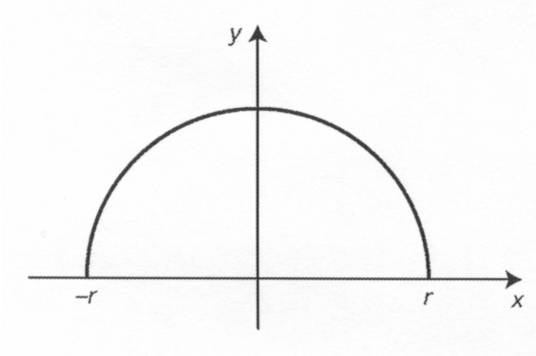
Lengden av sidekanten i kjegla er

$$s = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Overflaten er

$$O = \pi r s = \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{\pi\sqrt{2}}}$$

b) **Bruk formelen ovenfor til å vise at overflaten til en kule med radius *r* er 4π*r*².** **Ta utgangspunkt i en halvsirkel plassert i et koordinatsystem slik figuren til høyre viser.**



Løsning:

Formelen for en sirkel med radius r og sentrum i origo er

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Vi finner et uttrykk for y.

$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Halvsirkelen ovenfor består av de punktene på sirkelen der $y > 0$. Det gir

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Vi deriverer uttrykket

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (r^2 - x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r}{y}$$

Overflaten blir

$$O = 2\pi\int_{-r}^{r} y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi\int_{-r}^{r} y \cdot \frac{r}{y}\, dx$$

$$= 2\pi r\int_{-r}^{r} 1\, dx = 2\pi r\left[x\right]_{-r}^{r} = 2\pi r(r - (-r)) = 2\pi r \cdot 2r = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

c) En marsipankule dekket med sjokolade skjæres opp i skiver med samme tykkelse. Vis at alle skivene får like stor sjokoladeflate.

Løsning:

Vi viser at overflaten av ei kuleskive med bredde b er den samme hvor den skjæres. Vi lar den gå fra $x = a$ til $x = a + b$. Overflaten blir da

$$O = 2\pi \int_a^{a+b} y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int_a^{a+b} y \cdot \frac{r}{y}\, dx$$

$$= 2\pi r \int_a^{a+b} 1\, dx = 2\pi r \left[x \right]_a^{a+b} = 2\pi r(a + b - a) = 2\pi rb$$

Vi ser at arealet er $2\pi rb$. Det er ikke avhengig av hvor vi begynner å skjære. Arealet er bare avhengig av radien r og bredden b.

Vurdering:

Oppgaveteksten er mangelfull. Det burde stå 'Grafen f dreies 360° om x-aksen.' og ikke bare 'Grafen f dreies om x-aksen.'.

De svake elevene får nok ikke til noe her. I oppgave a blir det for mange symboler og et integral som ser veldig vanskelig ut. Vi tror oppgave a hadde vært bedre tilpasset de svake hvis det hadde stått $y = x$ i stedet for $f(x) = x$ i spørsmål a!

Oppgave b er så teknisk vanskelig at det bare er de aller flinkeste som kommer i mål. Og hvis en elev ikke klarer oppgave b, kan eleven heller ikke klare oppgave c.

Vurdering av settet:

Det kan virke som om settet har et tilstrekkelig antall lette spørsmål for de svake. Disse elevene bør klare såpass mye av oppgave 1 og oppgave 4 at de kan få 2 til eksamen.

Men det kan virke som om det er ganske få spørsmål av middels vanskegrad. Elever med karakteren 4 vil dermed lett havne på 3. Elever med en svak 5 havner på 4.

Det er nok bare de aller, aller flinkeste som klarer hele settet.

Det er grunn til å tro at elevene samles på midten med dette settet.

Settet legger opp til mange ganske kompliserte algebraiske omforminger. Dette kan tolkes som et signal om at vi bør styrke arbeidet med slike omforminger.

Elevene har bare i liten grad bruk for lommeregneren sin i dette settet. Det er ikke en eneste oppgave der de er avhengig av grafisk lommeregner. Er det også et signal?